О τ-измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана

А. М. Бикчентаев

Казанский (Приволжский) федеральный университет

Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, $\widetilde{\mathcal{M}}$ – $*$-алгебра всех τ-измеримых операторов, $L_1(\mathcal{M},\tau)$ – банахово пространство τ-интегрируемых операторов и число $1 \geqslant q > 0$. Получены обобщения задач 163 и 139 из [1] на τ-измеримые операторы: установлено, что

1) каждый τ-компактный q-гипонормальный оператор нормален;

2) если оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ нормален и для некоторого натурального числа n оператор A^n τ-компактен, то и оператор A τ-компактен.

Нами показано, что если оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ гипонормален и оператор A^2 τ-компактен, то и оператор A τ-компактен. Установлено новое свойство невозрастающих перестановок произведения гипонормального и когипонормального τ-измеримых операторов. Для нормальных операторов $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}$ показано совпадение невозрастающих перестановок операторов AB и BA. Из известного свойства перестановок имеем: неотрицательный оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ τ-компактен тогда и только тогда, когда τ-компактен A^p для всех $p > 0$. Нами показано, что аналогичная картина имеет место и для произведения неотрицательных операторов $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}$: τ-компактность AB эквивалентна τ-компактности операторов A^pB^r для всех $p, r > 0$. Получены приложения полученных результатов к F-нормированным симметричным пространством на $(\mathcal{M},\tau)$.

Если $A = A^*$, $B = B^*$ – τ-измеримые операторы и $AB \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, то $BA \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и $\tau(AB) = \overline{\tau(BA)} \in \mathbb{R}$. Если $A \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, то $\tau(A^*) = \overline{\tau(A)}$.

Пусть $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Если оператор A τ-компактен и $V \in \mathcal{M}$ является сжатием, то из $V^*AV = A$ следует, что $VA = AV$. Имеем $A = A^2$ тогда и только тогда, когда $A = |A^*||A|$. Это представление является новым и для ограниченных идемпотентов в $\mathcal{H}$. Если $A = A^2 \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, то $\tau(A) = \tau(\sqrt{|A|}|A^*|\sqrt{|A|}) \in \mathbb{R}^+$.

Если $A = A^2$ и A (или A^*) полу-гипонормален, то A нормален, тем самым A является проектором. Если $A = A^3$ и A гипонормален или когипонормален, то A нормален, тем самым $A = A^* \in \mathcal{M}$ и является разностью двух взаимно ортогональных проекторов $(A + A^2)/2$, $(A^2 - A)/2$. Если $A, A^2 \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и $A = A^3$, то $\tau(A) \in \mathbb{R}$.

Список литературы

[1] П. Халмош, *Гильбертово пространство в задачах*, Мир, Москва, 1970.

[2] А. М. Бикчентаев, "О нормальных τ-измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана", *Математические заметки*, **96**:3 (2014), 348–358.

[3] А. М. Бикчентаев, "К теории τ-измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана" (в печати).