Сходимость лакунарной последовательности частичных сумм кратных тригонометрических рядов Фурье

И. Л. Блошанский[a], Д. А. Графов[b]

[a] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова*
[b] *Московский государственный областной университет*

Пусть $S_n(x;f)$, $n \in \mathbb{Z}_1^N$, — последовательность прямоугольных частичных сумм кратного тригонометрического ряда Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$, $\mathbb{T}^N = [-\pi,\pi)^N$, $N \geqslant 2$. Пусть k $(1 \leqslant k \leqslant N-2)$ компонент вектора $n = (n_1,\ldots,n_N)$ — номера $S_n(x;f)$ — являются лакунарными последовательностями ($\{n^{(s)}\}, n^{(s)} \in \mathbb{Z}_1^1$, – лакунарная последовательность, если $n^{(1)} = 1$ и $\frac{n^{(s+1)}}{n^{(s)}} \geqslant q > 1$, $s = 1,2,\ldots$).

П. Шёлиным [1] было доказано, что для любой лакунарной последовательности $\{n_1^{(\lambda_1)}\}$, $n_1^{(\lambda_1)} \in \mathbb{Z}_1^1$, $\lambda_1 = 1,2,\ldots$, и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p>1$, $S_{n_1^{(\lambda_1)},\,n_2}(x;f)$ сходится почти всюду (п.в.) на $\mathbb{T}^2$. М. Кожима [2] обобщил этот результат, доказав, что если $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p>1$, $N \geqslant 3$, и $\{n_j^{(\lambda_j)}\}$, $n_j^{(\lambda_j)} \in \mathbb{Z}_1^1, \lambda_j = 1,2,\ldots, j = 1,\ldots,N-1$, — лакунарные последовательности, то

$$\lim_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-1},\,n_N\to\infty} S_{n_1^{(\lambda_1)},\ldots,n_{N-1}^{(\lambda_{N-1})},\,n_N}(x;f) = f(x) \ \text{ п.в. на } \ \mathbb{T}^N.$$

Как заметил М. Кожима (см. [2; теорема 2]), используя функцию Ч. Феффермана из работы [3], легко доказать, что сформулированный выше результат не может быть усилен в следующем смысле: для любой последовательности $\widetilde{n} = (n_3,\,n_4,\ldots,n_N) \in \mathbb{Z}_0^{N-2}$ (в частности, каждая компонента вектора $\widetilde{n}$ может быть элементом лакунарной последовательности) существует непрерывная функция $f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, такая, что

$$\overline{\lim_{n_1,\,n_2,\,\widetilde{n}\to\infty}} |S_{n_1,\,n_2,\,\widetilde{n}}(x;f)| = +\infty \ \text{ п.в. на } \ \mathbb{T}^N.$$

Последний результат, в частности, показывает, что, как только мы оставляем две компоненты вектора $n = (n_1,\ldots,n_N) \in \mathbb{Z}^N$ – номера $S_n(x;f)$ — "свободными" (в частности, не являющимися элементами никаких лакунарных последовательностей), класс функций $\mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $N \geqslant 3$, уже не является "классом сходимости п.в." указанного разложения.

В таком случае, возникает вопрос: можно ли вообще говорить о сходимости п.в. кратных ($N \geqslant 3$) тригонометрических рядов Фурье функций f из классов L_p, $p>1$, "в рамках" прямоугольного метода суммирования, когда последовательности частичных сумм этих рядов $S_n(x;f)$ имеют номера n, в которых две или более компонент являются "свободными". Некоторый ответ на этот вопрос дают следующие теоремы.

Пусть $N \geqslant 1$, $M = \{1,\ldots,N\}$ и $s \in M$. Обозначим: $J_s = \{j_1,\ldots,j_s\}$, $j_q < j_l$ при $q<l$, и (в случае $s<N$) $M \setminus J_s = \{m_1,\ldots,m_{N-s}\}$, $m_q < m_l$ при $q<l$, — непустые подмножества множества M. Будем считать также, что $J_0 = M \setminus J_N = \emptyset$.

Фиксируем произвольное k, $1 \leqslant k < N$, $N \geqslant 2$, и определим два вектора: вектор $\lambda = \lambda[J_k] = (\lambda_{j_1},\ldots,\lambda_{j_k}) \in \mathbb{Z}_1^k$, $j_s \in J_k$, $s = 1,\ldots,k$, и вектор $m = m[J_k] = (m_{j_1},\ldots,m_{j_{N-k}}) \in \mathbb{Z}_1^{N-k}$, $j_s \in M \setminus J_k$, $s = 1,\ldots,N-k$.

Символом $n^{(\lambda,m)} = n^{(\lambda,m)}[J_k] = (n_1,\ldots,n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$ будем обозначать вектор, у которого компоненты n_j, $j \in J_k$, являются элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей, а компоненты n_j, $j \in M \setminus J_k$, имеют вид: $n_j = n_0 \cdot m_j$, где m_j компоненты вектора $m[J_k]$, $n_0 \in \mathbb{Z}_0^1$.

Теорема 1. *Пусть J_k — произвольная "выборка" из M, $1 \leqslant k \leqslant N-2$, $N \geqslant 3$. Тогда для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $1 < p < \infty$, и для любого вектора $m[J_k]$*

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty, j \in J_k, \\ n_j = n_0 \cdot m_j, j \in M \setminus J_k, n_0 \to \infty}} S_{n^{(\lambda,m)}[J_k]}(x; f) = f(x) \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{T}^N.$$

В свою очередь, символом $n^{(\lambda,m(\nu))} = n^{(\lambda,m(\nu))}[J_k] = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$ будем обозначать такой N-мерный вектор, у которого компоненты n_j, $j \in J_k$, являются, как и раньше, элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей $n_j^{(\lambda_j)} \in \mathbb{Z}_1^1$, $\lambda_j = 1, 2, \dots$, а компоненты n_j, $j \in M \setminus J_k$, имеют вид $n_j = m_j = n_j(\nu)$, где $n_j(\nu) \in \mathbb{Z}_0^1$, $\nu = 1, 2, \dots$.

Теорема 2. *Пусть J_k — произвольная "выборка" из M, $1 \leqslant k \leqslant N-2$, $N \geqslant 3$. Тогда для любой функции $f \in L_2(\mathbb{T}^N)$ и для любых последовательностей $n_j(\nu) \in \mathbb{Z}_0^1$, $\nu = 1, 2, \dots$, $n_j(\nu) \to \infty$ при $\nu \to \infty$, $j \in M \setminus J_k$,*

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty, j \in J_k, \\ n_j(\nu), j \in M \setminus J_k, \nu \to \infty}} S_{n^{(\lambda,m(\nu))}[J_k]}(x; f) = f(x) \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{T}^N.$$

Список литературы

[1] Sjölin, "Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series", *Arkiv Matem.*, **9**:1 (1971), 65–90.

[2] M. Kojima, "On the almost everywhere convergence of rectangular partial sums of multiple Fourier series", *Sci. Repts. Kanazawa Univ.*, **22**:2 (1977), 163–177.

[3] C. Fefferman, "On the divergence of multiple Fourier series", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **77**:2 (1971), 191–195.