Абстрактная теорема Колмогорова, приложение к метрическим пространствам и топологическим группам

С. В. Бочкарев

Математический институт имени В. А. Стеклова РАН

Одним из наиболее ярких фактов гармонического анализа является результат А. Н. Колмогорова

о расходящемся тригонометрическом ряде, установленный в 1923 году (см. [1]).

Теорема I. *Существует функция $F \in L_1(0, 2\pi)$, тригонометрический ряд Фурье которой расходится почти всюду.*

Долгое время оставался открытым вопрос, привлекавший внимание специалистов ещё в 30-ых годах прошлого века, о распространении этой фундаментальной теоремы Колмогорова на все ограниченные ортонормированные системы. Но так как при построении расходящегося почти всюду ряда Фурье использовались тонкие специфические свойства тригонометрической системы, то представлялось невозможным осуществить подобную конструкцию в общей ситуации, где необходимо оценивать связанную с распределением знаков интерференцию заданных неявно ядер Дирихле, соответствующих δ - функциям с различными носителями.

В 1975 году автор [2] разработал новый метод построения расходящихся рядов Фурье, применимый к любой ограниченной ортонормированной системе.

Теорема II. *Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ортонормированная на $[0, 1]$ система, удовлетворяющая при некотором $A \geqslant 1$ условию*

$$\|f_n\|_\infty \leqslant A, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Тогда существует такая функция $F \in L_1(0, 1)$, ряд Фурье которой по системе $\{f_n\}$ неограниченно расходится на множестве E, $\mu(E) \geqslant \gamma(A) > 0$.

Замечание 1. Множество E точек расходимости здесь необязательно имеет полную меру (даже для полной системы $\{f_n\}$). Однако в классических случаях (тригонометрическая система, система Уолша, системы характеров, а также любые перестановки указанных систем) из расходимости на множестве положительной меры непосредственно выводится существование рядов Фурье, расходящихся почти всюду (см. [3, с. 247-249]), поскольку указанные системы допускают сдвиги.

В настоящей статье теореме Колмогорова придана наиболее общая форма. Здесь рассматриваются любые ограниченные биортонормированные системы комплекснозначных функций, определенных на произвольном измеримом пространстве. Для этих систем установлен результат, дающий точную нижнюю логарифмическую оценку мажоранты отрезков частных сумм двух сопряженных рядов Фурье, взятых от набора δ -функций со специально подобранными носителями. Полученная абстрактная теорема применена для построения расходящихся на множестве положительной меры рядов Фурье-Лебега по ограниченным биортонормированным системам комплекснозначных функций, определенных на метрических пространствах и топологических группах.

Пусть (X, S, μ) - пространство с мерой, S есть σ-алгебра μ-измеримых множеств, $\mu X = 1$, и пусть $f_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ - биортонормированная система комплекснозначных функций, определенных на X, т.е.

$$\int_X f_n(x)\overline{g_m(x)}\, d\mu(x) = \delta_{n,m}; \quad n, m = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $\delta_{n,m}$ -символ Кронекера.

Через $L_p(X, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначим пространство Лебега комплекснозначных функций на X (см. [4, гл. 1], а также [5]).

В статье рассматриваются такие системы $\{f_n, g_n\}$, для которых $f_n, g_n \in L_\infty$, $n = 1, 2, \ldots$.

Для любой $F \in L_1(X, \mu)$, система $\{f_n, g_n\}$ порождает два ряда Фурье, называемых сопряженными рядами:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(F, g_n) f_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty}(F, f_n) g_n(x). \tag{2}$$

Через $\asymp$ и $\ll$ обозначаются эквивалентность и неравенство с абсолютными постоянными, $C(\,\cdot\,)$ и $\gamma(\,\cdot\,)$ обозначают положительные постоянные, которые зависят от указанных параметров и могут быть разными в разных формулах, $\mu(E)$ есть μ - мера измеримого множества $E \subset X$, $\log$ - натуральный логарифм.

Имеет место общая теорема, дающая нижнюю оценку L_1 - норм частных сумм двух рядов по сопряженным системам $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ с произвольными комплексными коэффициентами (см. (1), (2)).

Теорема 1. *Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ - две последовательности комплексных чисел. Тогда для любого $N = 2, 3, \ldots$ выполняется неравенство*

$$\max_{1\leqslant n\leqslant N}(\|a_n f_n\|_\infty + \|b_n g_n\|_\infty) \sum_{m=1}^{N} \int_X \left(\left|\sum_{n=1}^{m} a_n f_n(x)\right| + \left|\sum_{n=1}^{m} b_n g_n(x)\right|\right) d\mu(x)$$
$$\gg \log N \left|\sum_{n=1}^{N} \lambda_n a_n \bar{b}_n \left(1 - \frac{n}{N+1}\right)\right|, \tag{3}$$

где $\{\lambda_n\}$ - последовательность положительных чисел, причем

$$\lambda_n \asymp 1, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

Из теоремы 1 выводятся логарифмические нижние оценки средних арифметических от симметризованных функций Лебега для системы $\{f_n, g_n\}$ в точке и на множестве положительной меры (см. (3)).

Теорема 2. *Для почти всех $x \in X$ при любом $N = 2, 3, \ldots$ выполняется неравенство*

$$\max_{1\leqslant n\leqslant N}(\|f_n\|_\infty \|g_n\|_\infty) \sum_{m=1}^{N} \int_X \left(\left|\sum_{n=1}^{m} f_n(x)\overline{g_n(\theta)}\right| + \left|\sum_{n=1}^{m} g_n(x)\overline{f_n(\theta)}\right|\right) d\mu(\theta)$$
$$\gg \log N \left|\sum_{n=1}^{N} \lambda_n f_n(x)\overline{g_n(x)} \left(1 - \frac{n}{N+1}\right)\right|, \tag{5}$$

где $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет соотношению(4).

Определение. Назовем биортонормированную систему $\{f_n, g_n\}$ ограниченной, если существует положительная постоянная $A \geqslant 1$, для которой

$$\|f_n\|_\infty \cdot \|g_n\|_\infty \leqslant A; \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{6}$$

Используя (1), (5), (6) получим оценку средних арифметических от функций Лебега ограниченной биортонормированной системы $\{f_n, g_n\}$.

Теорема 3. *Пусть $\{f_n, g_n\}$ - комплекснозначная ограниченная биортонормированная система. Тогда для любого $N = 2, 3, \dots$ существует множество $E_N \subset X$,*

$$\mu(E_N) \geqslant \gamma(A), \tag{7}$$

для которого при всех $x \in E_N$ справедлива оценка

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\int_X\left(\left|\sum_{n=1}^{m} f_n(x)\overline{g_n(\theta)}\right| + \left|\sum_{n=1}^{m} g_n(x)\overline{f_n(\theta)}\right|\right) d\mu(\theta) \gg \frac{1}{A}\log N. \tag{8}$$

В вещественном случае теоремы 1-3 установлены в работах автора [2], [6], [7].

Следующий результат содержит абстрактную формулировку теоремы Колмогорова для любой ограниченной биортонормированной системы, определенной на произвольном измеримом пространстве.

Теорема 4. *Для любой ограниченной биортонормированной системы комплекснозначных функций $\{f_n, g_n\}_{n=1}^\infty$, определенных на измеримом пространстве X, при каждом $N = 2, 3, \dots$ существует множество $\Omega_N \subset X^{8N+1}$, состоящее из точек $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{8N}; x)$, для которого выполняется неравенство* (*см.* (6))

$$\mu(\Omega_N) \geqslant \gamma(A), \tag{9}$$

и существует последовательность номеров $\{m_p(x)\}$, $Np \leqslant m_p(x) < N(p+1)$, зависящая от точки $x \in X$, а также существуют функции $\eta_j(\theta) = 0, 1$; где $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{8N})$, $j = 1, \dots, 8N$; такие что при всех

$$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{8N}; x) \in \Omega_N$$

выполняется следующее соотношение:

$$\begin{aligned} &\overline{\lim_{p\to\infty}}\frac{1}{N}\left|\sum_{j=1}^{4N}\left(\eta_{2j-1}(\theta)\sum_{n=Np}^{m_p(x)} f_n(x)\overline{g_n(\theta_{2j-1})} + \eta_{2j}(\theta)\sum_{n=Np}^{m_p(x)} g_n(x)\overline{f_n(\theta_{2j})}\right)\right| \\ &\geqslant C(A)\log N. \end{aligned} \tag{10}$$

Подобная теорема в вещественном случае была установлена в работе автора [7].

Доказательство комплексного варианта позволяет значительно расширить область применения теоремы и дает возможность использовать ее для исследования характеров топологических групп, а также биортонормированных систем, образованных функциями комплексного переменного. Это потребовало существенного усложнения и переработки вещественной конструкции. Кроме того, удалось убрать следующее дополнительное ограничение на биортонормированную систему $\{f_n, g_n\}$ (см. [7]):

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty}\int_X F(x) f_n(x)\, d\mu(x) = 0, \\ \lim_{n\to\infty}\int_X F(x) g_n(x)\, d\mu(x) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

для любой $F \in L_\infty$.

Соотношения типа (11) использовались в первоначальной конструкции, разработанной для ортонормированных систем (см. [2]). Но в случае биортонормированной системы соотношения (11) могут не выполняться (см. [7]), и поэтому они были введены в качестве дополнительного условия на систему $\{f_n, g_n\}$, от которого в этой работе удалось освободиться.

Для того, чтобы на основе теоремы 4 получить ряд Фурье-Лебега, расходящийся на множестве положительной меры, нужно аппроксимировать δ -функции Дирака ступенчатыми функциями, а для этого в пространстве X должна иметь место теорема о дифференцировании неопределенного интеграла. Тогда в силу соотношений (9) и (10) можно выбрать такую систему δ-функций с носителями в точках $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{8N}$, где

$$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{8N}; x) \in \Omega, \qquad N = 2, 3, \dots,$$

соответствующая аппроксимация которых позволяет построить расходящийся ряд Фурье-Лебега.

Пусть теперь X - метрическое пространство, в котором задана борелевски регулярная внешняя мера μ^*. Согласно Каратеодори внешняя мера μ^* порождает на X полную меру μ (см. [8, с. 44-49]).

Далее, пусть $\{P_m\}_{m=1}^\infty$ - регулярная последовательность сетей в X, где каждая сеть P_m образует борелевское разбиение пространства X на ячейки S, для которых выполняется соотношение (см. [4, с. 230])

$$\lim_{m\to\infty} \sup\{\operatorname{diam}(S) : S \in P_m\} = 0.$$

Тогда эта последовательность сетей образует μ^* - покрытие Витали и для любой функции $F \in L_1(X, \mu)$ при почти всех $x \in X$ имеет место равенство

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\mu(S_m(x))} \int_{S_m(x)} F(\theta)\, d\mu(\theta) = F(x),$$

где $S_m(x)$ - ячейка сети P_m, содержащая точку x (см. [9, с. 168-173]).

Теорема 5. *Если X - метрическое пространство, в котором задана борелевски регулярная внешняя мера μ^*, $\mu^*(X) = 1$, то для любой ограниченной биортонормированной системы комплекснозначных функций $\{f_n, g_n\}_{n=1}^\infty$ найдутся функции $F_1, F_2 \in L_1(X, \mu)$ и найдется множество $E \in X$, такие что*

$$\mu(E) \geqslant \gamma(A)$$

и при всех $x \in E$ выполняется соотношение

$$\varlimsup_{N\to\infty} \left| \sum_{n=1}^{N} \Big((F_1, g_n) f_n(x) + (F_2, f_n) g_n(x) \Big) \right| = \infty.$$

В частности для евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ и классической меры Лебега получаем следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть E - измеримое множество в $\mathbb{R}^m$, где $m = 1, 2, \dots,$ и $\mu(E) < \infty$. Тогда для любой ограниченной биортонормированной на E системы комплекснозначных функций $\{f_n, g_n\}_{n=1}^\infty$ существует ряд Фурье, неограниченно расходящийся на множестве*

$$E_1 \subset E, \qquad \mu(E_1) \geqslant \gamma(A, \mu(E)).$$

Отметим, что вещественный вариант теорем 5 и 6 при дополнительном условии (11) был установлен в работе [7].

Применим абстрактную теорему Колмогорова (теорема 4) к топологическим группам. Пусть G - компактная абелева группа и пусть μ - инвариантная нормированная мера Хаара на G (см. [10, гл. 5], [11, гл. 2], [12, гл. 4], [13, гл. 3]).

Будем использовать следующую теорему о дифференцировании неопределенного интеграла, которую доказали Э. Хьюитт и и Р. Эдвардс (см. [14], [13, т. 2, с. 762-770]) для локально компактных групп с левоинвариантной мерой Хаара.

Через D' обозначим последовательность борелевских множеств U_n, таких что

$$U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_n \supset \cdots$$

и для некоторой положительной постоянной C при всех $n = 1, 2, \ldots,$ выполняется неравенство

$$0 < \mu(U_n U_n^{-1}) \leqslant C\mu(U_n).$$

Предположим также, что каждая окрестность единицы группы G содержит некоторое U_n. (В частности, конечномерный тор и все группы Ли допускают D' - последовательность (см. [14]).)

Тогда для любой комплекснозначной функции $f \in L_1(G, \mu)$ при почти всех $x \in G$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu(U_n)} \int_{xU_n} f(\theta)\, d\mu(\theta) = f(x).$$

В силу теоремы 4 соответствующим образом произведенная аппроксимация δ - функций на группе G с применением теоремы о дифференцировании неопределенного интеграла позволяет для любой ограниченной комплексной биортонормированной системы построить ряд Фурье, расходящийся на множестве положительной меры.

Теорема 7. *Пусть G - компактная абелева группа и μ - инвариантная нормированная мера Хаара на G. Предположим, что в группе G существует D' - последовательность. Тогда, если $\{f_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограниченная биортонормированная система комплекснозначных функций, определенных на G, то найдутся $F_1, F_2 \in L_1(G, \mu)$ для которых найдется такое множество $E \subset G$*

$$\mu(E) \geqslant \gamma(A),$$

что при всех $x \in E$ выполняется соотношение

$$\varlimsup_{N\to\infty} \left| \sum_{n=1}^{N} \Big((F_1, g_n) f_n(x) + (F_2, f_n) g_n(x) \Big) \right| = \infty.$$

Группа характеров $\{\chi_\alpha\}$ компактной абелевой группы G образует полное ортонормированное семейство, т.е. любая $f \in L_2(G, \mu)$ разлагается в обобщенный ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{\alpha} (f, \chi_\alpha) \chi_\alpha(x),$$

где ряд сходится к f в $L_2(G, \mu)$ и для каждой функции f не более чем счетное число коэффициентов отличны от нуля (см. [15, с. 194-196]).

Поэтому в силу теоремы 7, учитывая замечание 1, получаем, в частности, что справедлив следующий результат.

Теорема 8. *Если компактная абелева группа G допускает D' - последовательность и ее группа характеров $\{\chi_\alpha\}$ бесконечна и счетна, то существует функция $F \in L_1(G, \mu)$, ряд Фурье которой неограниченно расходится μ - почти всюду на G.*

Работа выполнена за счет Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

Список литературы

[1] А. Н. Колмогоров, *Fund. Math.*, **4** (1923), 324–328.
[2] С. В. Бочкарев, *Мат. сб.*, **98** (1975), 436–449.
[3] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Т. 2, Мир, М., 1965.
[4] С. Сакс, *Теория интеграла*, Факториал, М., 2004.
[5] E. Hewitt, K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
[6] С. В. Бочкарев, *ДАН*, **223**:1 (1975), 16–19.
[7] С. В. Бочкарев, *Тр. МИАН*, **260** (2008), 44–56.
[8] P. Халмош, *Теория меры*, Факториал, М., 2004.
[9] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987.
[10] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, ОНТИ, М.–Л., 1938.
[11] А. Вейль, *Интегрирование в топологических группах и его применения*, ИЛ, М., 1950.
[12] Э. Хьюит, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, Т. 1, 2, Мир, М., 1975.
[13] М. А. Наймарк, *Теория представлений групп*, Наука, М., 1976.
[14] R. Edwards, E. Hewitt, *Acta Math.*, **113** (1965), 181–218.
[15] Л. Люмис, *Введение в абстрактный гармонический анализ*, ИЛ, М., 1956.