# О смешанной задаче для волнового уравнения на графе


М. Ш. Бурлуцкая

*Воронежский государственный университет*


Рассматривается простейший геометрический граф, состоящий из двух ребер-колец, касающихся в одной точке (узле графа). Параметризуя каждое ребро графа отрезком $[0,1]$, изучаем на таком графе следующую смешанную задачу для волнового уравнения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial x^2} - q_j(x)u_j(x,t), \quad (j=1,2),\\ x\in[0,1], t\in(-\infty,\infty),\end{gathered} \tag{1}$$

$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = u_2(0,t) = u_2(1,t), \tag{2}$$

$$u'_{1x}(0,t) - u'_{1x}(1,t) + u'_{2x}(0,t) - u'_{2x}(1,t) = 0, \tag{3}$$

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_2(x,0) = \varphi_2(x), \quad u'_{1t}(x,0) = u'_{2t}(x,0) = 0, \tag{4}$$

где $q_j \in C[0,1]$ (условия (2), (3) порождены структурой графа).

Решение задачи ищется методом Фурье. Используется подход, предложенный в [1, 2], который позволяет с помощью специального преобразования формального ряда получить классическое решение задачи при минимальных условиях на начальные данные, и более того, избежать при этом трудоемкого исследования асимптотики собственных функций соответствующего оператора. Предполагаем для $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$ ($T$ — знак транспонирования) выполненными требования: $\varphi_j(x) \in C^2[0,1]$ и комплекснозначные,

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(1) = \varphi_2(0) = \varphi_2(1),\ \varphi'_1(0) - \varphi'_1(1) + \varphi'_2(0) - \varphi'_2(1) = 0, \tag{5}$$

$$\varphi''_1(0) = \varphi''_1(1) = \varphi''_2(0) = \varphi''_2(1). \tag{6}$$

Кроме того, для простоты ограничимся случаем: $q_1(0) = q_2(0) = q_1(1) = q_2(1)$.

Метод Фурье приводит к спектральной задаче: $Ly = \lambda y$, где $Ly = (-y''_1 + q_1(x)y_1, -y''_2 + q_2(x)y_2)^T$ с краевыми условиями (5).

Собственные значения $\lambda_n$ оператора $L$ асимптотически приближаются к числам $\lambda_n^0 = (\pi n)^2$ при $n \to \infty$, причем они могут быть и кратными. Обозначим $\widetilde{\gamma}_n = \{\rho \mid |\rho - \pi n| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, $\gamma_n$ — образ $\widetilde{\gamma_n}$ в $\lambda$-плоскости ($\lambda = \rho^2$, $\mathrm{Re}\rho \geqslant 0$).

Формальное решение $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^T$ задачи (1)–(4) можно записать в виде:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\,d\lambda,$$

где $r > 0$ и фиксировано, $\gamma_n$ вне $|\lambda| = r$, собственные значения $|\lambda_n| > r$ попадают в $\gamma_n$ при $n \geqslant n_0$; $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора $L$ ($E$ – единичный оператор, $\lambda$ – спектральный параметр).

Преобразование решения строится следующим образом: полагаем $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t)$, где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda - \mu_0}(R^0_\lambda g)\cos\rho t\,d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}[R_\lambda g - R_\lambda^0 g]\cos\rho t\, d\lambda,$$

$|\mu_0| > r$ и $\mu_0$ не является собственным значением операторов $L$ и $L_0$, причем $\mu_0$ вне $\gamma_n$ при $n \geqslant n_0$; $g = (L-\mu_0 E)\varphi$, $L_0$, есть оператор $L$ при $q(x)\equiv 0$, $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$.

Ряд $u_0(x,t)$, представляющий формальное решение задачи (1)–(4) при $q(x)\equiv 0$, суммируется, его сумма представляет аналог формулы Даламбера [3].

Исследуя резольвенту оператора $L$ и используя методы [1], [2] доказывается, что ряд $u_1(x,t)$ и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по $x$ и $t$ до второго порядка, сходятся абсолютно и равномерно по $x\in[0,1]$ и $t\in[-T,T]$, где $T>0$ любое.

Теорема. *Формальное решение $u(x,t)$ есть классическое решение задачи* (1)–(4) *при $\varphi_j \in C^2[0,1]$, удовлетворяющих условиям* (5)–(6).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00238, 14-01-00867).

## Список литературы

[1] М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов, “Резольвентный подход в методе Фурье”, *Докл. РАН*, **458**:2 (2014), 138–140.

[2] М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов, “Резольвентный подход для волнового уравнения”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **55**:2 (2015), 51–63.

[3] М. Ш. Бурлуцкая, “Об одной смешанной задаче для волнового уравнения на графе”, *Современные методы теории функций и смежные проблемы*, материалы межд. конферен. : Воронеж. зимн. мат. школы., Издат. дом ВГУ, Воронеж, 2015, 180–182.