Поперечники весовых классов Соболева в весовом пространстве Лебега: случай сильной особенности в точке у второго веса

А. А. Васильева

Московский государственый университет имени М. В. Ломоносова

Пусть $B \subset \mathbb{R}^d$ — открытый шар с центром в нуле радиуса $R < 1$, g, $v : B \to (0, \infty)$, $g(x) = |x|^{-\beta_g} |\log |x||^{-\alpha_g}$, $v(x) = |x|^{-\beta_v} |\log |x||^{-\alpha_v}$, $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $r \in \mathbb{N}$. Предположим, что $\delta := r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p} > 0$. Ранее автором рассматривался случай $\beta_v < \frac{d}{q}$. Теперь предполагаем, что $\beta_v \in \left(\frac{d}{q}, \infty\right) \setminus \left\{\frac{d}{q} + 1, \ldots, \frac{d}{q} + r - 1\right\}$.

Пусть $W^r_{p,g}(B) = \left\{f : B \to \mathbb{R} \middle| \ \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(B)} \leqslant 1\right\}$. Обозначим через $W^r_{p,g}(B, \Gamma_0)$ замыкание в $W^r_{p,g}(B)$ множества бесконечно гладких функций, равных 0 в некоторой окрестности нуля (относительно полуметрики, порожденной полунормой $\left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(B)}$). Также положим $L_{q,v}(B) = \{f : \|f\|_{L_{q,v}(B)} := \|vf\|_{L_q(B)} < \infty\}$.

Теорема. *Пусть* $\delta > 0$, $\beta_g + \beta_v = \delta$,

$$\beta_v \in \left(\frac{d}{q}, \infty\right) \setminus \left\{\frac{d}{q} + 1, \ldots, \frac{d}{q} + r - 1\right\},$$

$\alpha := \alpha_g + \alpha_v > \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+$.

1. *Пусть* $p \geqslant q$ *или* $p \leqslant q \leqslant 2$. *Предположим, что* $\alpha \neq \frac{\delta}{d}$. *Тогда*

$$d_n(W^r_{p,g}(B, \Gamma_0), L_{q,v}(B)) \asymp n^{-\min\left\{\frac{\delta}{d}, \alpha\right\} + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+}.$$

2. *Пусть* $p < q$, $q > 2$. *Положим* $\theta_1 = \frac{\delta}{d} + \min\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right\}$, $\theta_2 = \frac{q\delta}{2d}$, $\theta_3 = \alpha + \min\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right\}$, $\theta_4 = \frac{q\alpha}{2}$. *Предположим, что существует* $j_* \in \{1, 2, 3, 4\}$ *такое, что* $\theta_{j_*} < \min_{j \neq j_*} \theta_j$. *Тогда*

$$d_n(W^r_{p,g}(B, \Gamma_0), L_{q,v}(B)) \asymp n^{-\theta_{j_*}}.$$