

Спектральный анализ и корректная разрешимость гиперболических вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений

В. В. Власов, Н. А. Раутиан

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Исследуются интегро-дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное суммами вольтерровых интегральных операторов. Указанные абстрактные интегро-дифференциальные уравнения могут рассматриваться как операторные модели задач, возникающих в линейной теории вязкоупругости, теории усреднений, теплопроводности в средах с памятью и т.д. Примером конкретной актуальной проблемы является задача для системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных линейной теории вязкоупругости:

$$\rho \ddot{u}(x, t) - (L_1 + L_2)u(x, t) + \int_0^t K_1(t-s)L_1u(x, s)ds + \int_0^t K_2(t-s)L_2u(x, s)ds = f(x, t),$$

где $u = \vec{u}(x, t) \in \mathbb{R}^3$ – вектор перемещений вязкоупругой наследственной среды, $t > 0$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с гладкой границей, вектор u удовлетворяет условию Дирихле на границе области Ω , $L_1u = \mu \cdot (\Delta u + \text{grad div} u)$, $L_2u = \lambda \cdot \text{grad div} u$, λ, μ – постоянные коэффициенты Ламе, $L = L_1 + L_2$ – оператор Ламе теории упругости, K_1, K_2 – функции релаксации памяти, представляющие собой ряды убывающих экспонент с положительными коэффициентами, характеризующие наследственные свойства среды.

Установлена локализация и структура спектра оператор-функций, являющихся символами указанных интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Получены результаты о корректной разрешимости этих уравнений в весовых пространствах Соболева вектор-функций со значениями в гильбертовом пространстве, заданных на положительной полуоси.

Полученные результаты являются естественным обобщением и развитием результатов, опубликованных в работах [1], [2].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00754).

Список литературы

- [1] В. В. Власов, Н. А. Раутиан, “Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений”, *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, **28** (2011), 75–113.
- [2] V. V. Vlasov, N. A. Rautian, “Spectral Analysis and Representations of Solutions of Abstract Integro-differential Equations in Hilbert Space”, *Operator Theory: Advances and Applications. Springer Basel AG*, **235** (2013), 519–537.