Пространства Соболева, геометрическая теория функций и их применения

С. К. Водопьянов

Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН

В докладе будут показаны результаты и идеи, полученные в ряде недавних работ, в основании которых лежит описание соболевских гомеоморфизмов $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$ открытых областей евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, обратный к которым также принадлежит классу Соболева [1]. Этот результат описывает двухиндексную шкалу гомеоморфизмов, зависящих от вещественных параметров $n-1 < q \leqslant p < \infty$.

Такие гомеоморфизмы при некоторых условиях на функцию искажения и только такие индуцируют ограниченный оператор $\varphi^*\colon L^1_p(\Omega') \to L^1_q(\Omega)$ пространств Соболева (включая весовые) по правилу композиции: $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ [2].

Результаты работ [1,2,3] мотивируют следующее

Определение. Пусть $\theta\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ — измеримая функция: $0 < \theta < \infty$ п. вс. Отображение $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, называется *отображение с ограниченным θ-весовым (p,q)-искажением*, $n-1 < q \leqslant p < \infty$, если:

1) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$;
2) φ имеет конечное искажение: $D\varphi(x) = 0$ п. вс. на множестве нулей якобиана $J(x,\varphi) = \det D\varphi(x)$;
3) φ непрерывно открыто и дискретно, и $J(x,\varphi) \geqslant 0$;
4) θ-весовая функция (q,p)-искажения

$$\Omega \ni x \mapsto K^\theta_q(x,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{\theta^{\frac{1}{q}}(x)|D\varphi(x)|}{J(x,\varphi)^{\frac{1}{p}}}, & \text{если} \quad J(x,\varphi) > 0, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

принадлежит $L_\kappa(\Omega)$, где $\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\kappa = \infty$ при $p = q$).

Очевидно, что в случае $\theta \equiv 1$, $q = p = n$ мы получаем отображение с ограниченным искажением, начала теории которых были заложены Ю. Г. Решетняком в 1960-ые годы прошлого века [3]. Если дополнительно φ — гомеоморфизм, то φ — квазиконформное отображение.

Метод работы [1] позволяет исследовать свойства отображений с ограниченным θ-весовым (p,q)-искажением без обременительных аналитических предположений (в ряде работ предполагалось дополнительно выполнение $\mathcal{N}$-свойства Лузина). Показано, что новый класс отображений наследует многие свойства отображений с ограниченным искажением:

1) обобщенную лемму Полецкого [4];
2) оценки для емкости образа кольцевой области [5], доказательство которых основывается на работах [1,4];
3) теорему Лиувилля [5];
4) устранимость множеств [5]

и др. результаты.

Упомянутые выше результаты применяются для исследовании задача минимизации функционала $I(\varphi) = \int_\Omega W(x, D\varphi)\,dx$ на новом классе отображений сравнительно с классами, исследуемыми ранее Дж. Боллом [6]. Ослаблены условия суммируемости допустимых деформаций до $\varphi \in W_n^1(\Omega)$ и условия роста подынтегральной функции $W(x, F)$. Компенсацией за ослабление вышеперечисленных условий является требование на характеристику искажения $\frac{|D\varphi(x)|}{J(x,\varphi)^{\frac{1}{n}}} \leqslant M(x) \in L_{ns}(\Omega)$. В условиях поливыпуклости и коэрцитивности подынтегральной функции $W(x, F)$ получена теорема существования задачи минимизации функционала $I(\varphi)$ на новом семействе допустимых деформаций $\mathcal{A}$ [7]. Приводится пример поливыпуклой функции $W(x, F)$, не удовлетворяющей условиям работы [6], для которой, тем не менее, можно решить задачу минимизации для функционала $I(\varphi)$.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (код проекта № 14-01-00552).

Список литературы

[1] С. К. Водопьянов, “О регулярности отображений, обратных к соболевским”, *Матем. сб.*, **203**:10 (2012), 3–32.

[2] С. К. Водопьянов, А. Д. Ухлов, “Операторы суперпозиции в пространствах Соболева”, *Известия ВУЗов. Математика*, **486**:10 (2002), 11–33.

[3] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск, 1982.

[4] С. К. Водопьянов, “О регулярности функции Полецкого при слабых аналитических предположениях исходного отображения”, *Докл. РАН*, **455**:2 (2014), 130–134.

[5] А. Н. Байкин, С. К. Водопьянов, “Емкостные оценки, теоремы типа Лиувилля и об устранении особенностей для отображений с ограниченным (p, q)-искажением”, *Сиб. мат. журн.*, **56**:2 (2015), 290–321.

[6] J. M. Ball, “Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity”, *Arch. Ration. Mech. and Analys*, **63** (1977), 337–403.

[7] С. К. Водопьянов, А. О. Молчанова, “Вариационные задачи нелинейной теории упругости в некоторых классах отображений с конечным искажением”, *Докл. РАН*, 2015 (в печати).