Кратные коэффициенты Фурье и обобщенные классы Липшица в равномерной метрике

С. С. Волосивец

Саратовский государственный университет

Пусть $\{c_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ and $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_{jk}| < \infty$. Тогда $f(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{jk}e^{i(jx+ky)}$ является непрерывной 2π-периодической по каждому аргументу функцией. Пусть

$$\triangle_{t,\tau}^{m,n} f(x,y) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{j+k}\binom{m}{j}\binom{n}{k} f(x+(m-2j)t/2, y+(n-2j)\tau/2)$$

является смешанной разностью порядков m,n с шагом t,τ. Легко видеть, что справедливо равенство

$$\triangle_{t,\tau}^{m,n} f(x,y) = (2i)^{m+n}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\sin jt/2)^m(\sin k\tau/2)^n c_{jk}e^{i(jx+ky)}.$$

Пусть класс $\Phi^{(2)}$ состоит из положительных на $[0,2\pi]^2\setminus\{(0,0)\}$ функций ω, где $\omega(0,0)=0$, $\omega(x_2,y_2)-\omega(x_2,y_1)-\omega(x_1,y_2)+\omega(x_1,y_1)\geqslant 0$ and $\omega(x_2,y_2)\geqslant\omega(x_1,y_1)$ if $x_2\geqslant x_1$, $y_2\geqslant y_1$, $x_i,y_i\in[0,2\pi]$, $i=1,2$. Если $\omega\in\Phi^{(2)}$ такова, что

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}(ij)^{-1}\omega\left(\frac{2\pi}{i},\frac{2\pi}{j}\right) = O\left(\omega\left(\frac{2\pi}{m},\frac{2\pi}{n}\right)\right),\quad m,n\in\mathbb{N},$$

то ω принадлежит классу BB. Если же $m,n>0$ и для $\omega\in\Phi^{(2)}$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{l} i^{m-1}j^{n-1}\omega\left(\frac{2\pi}{i},\frac{2\pi}{k}\right) = O\left(j^m l^n\omega\left(\frac{2\pi}{j},\frac{2\pi}{l}\right)\right),\quad j,l\in\mathbb{N},$$

то ω принадлежит классу B_mB_n. Одномерные аналоги этих классов введены Н.К.Бари и С.Б.Стечкиным [1]. Будем писать $f\in H^{\omega,m,n}$ для $m,n\in\mathbb{N}$ и $\omega\in\Phi^{(2)}$, если для всех $\delta_1,\delta_2\in[0,2\pi]$ верно неравенство $\omega_{mn}(f,\delta_1,\delta_2) = \sup\{|\triangle_{t,\tau}^{m,n} f(x,y) : 0\leqslant t\leqslant\delta_1, 0\leqslant\tau\leqslant\delta_2\}\leqslant C\omega(\delta_1,\delta_2)$. Соответственно, $h^{\omega,m,n} = \{f\in H^{\omega,m,n} : \omega_{mn}(f,\delta_1,\delta_2) = o(\omega(\delta_1,\delta_2)), \delta_1,\delta_2\to 0+0\}$. Будем писать $\omega\in\Delta_2$, если $\omega(2t,\tau)\leqslant C_1\omega(t,\tau)$ для всех $2t,\tau\in[0,2\pi]$ and $\omega(t,2\tau)\leqslant C_1\omega(t,\tau)$ for all $t,2\tau\in[0,2\pi]$.

Теорема 1. (i) *Пусть* $\{c_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *и* $f(x,y)$ *определены выше. Если* $m,n\in\mathbb{N}$, $\omega\in BB\cap\Delta_2$ *и имеет место соотношение*

$$\sum_{|j|\leqslant M}\sum_{|k|\leqslant N}|j^m k^n c_{jk}| = O\left(M^m N^n\omega\left(\frac{2\pi}{M},\frac{2\pi}{N}\right)\right),\quad M,N\in\mathbb{N},\tag{1}$$

то $f\in H^{\omega,m,n}$.

(ii) *Если* $\{c_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *и* $f(x,y)$ *определены выше,* $m,n\in\mathbb{N}$ *and* $j^m k^n c_{jk}\geqslant 0$ *for all* $|j|,|k|\geqslant 1$, *то из* $f\in H^{\omega,m,n}$ *следует выполнение соотношения* (1).

Следствие. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $\omega \in BB \cap B_n B_m$, $j^m k^n c_{jk} \geqslant 0$ *для всех* $j.k \in \mathbb{Z}$. *Если* $\{c_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *и* $f(x, y)$ *определены выше, то следующие четыре соотношения попарно эквивалентны*:

1) $f \in H^{\omega,m,n}$;

2) (1);

3) $\sum\limits_{|j|=M}^{\infty} \sum\limits_{|k|=N}^{\infty} |c_{jk}| = O\left(\omega\left(\frac{2\pi}{M}, \frac{2\pi}{N}\right)\right)$, $M, N \in \mathbb{N}$;

4) $\sum_{j=[M/2]}^{M} \sum_{k=[N/2]}^{N} |c_{jk}| = O\left(\omega\left(\frac{2\pi}{M}, \frac{2\pi}{N}\right)\right)$, $M, N \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty)$.

Теорема 2. *Пусть* $\{c_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *и* $f(x, y)$ *определены выше.*

(i) *Если* $m, n \in \mathbb{N}$, $\omega \in BB \cap \Delta_2$ *и выполнено условие*

$$\sum_{|j|\leqslant M} \sum_{|k|\leqslant N} |j^m k^n c_{jk}| = o\left(M^m N^n \omega\left(\frac{2\pi}{M}, \frac{2\pi}{N}\right)\right), \quad M, N \to \infty, \tag{2}$$

то $f \in h^{\omega,m,n}$.

(ii) *Если* $j^m k^n c_{jk} \geqslant 0$ *for all* $|j|, |k| \geqslant 1$ *и* $f \in h^{\omega,m,n}$, *то* (2) *имеет место.*

Результаты выше уточняют и обобщают результаты Ф. Морица из [2].

Список литературы

[1] Н.К.Бари, С.Б.Стечкин, “Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций”, *Труды Моск. мат. об-ва*, **5** (1956), 483–522.

[2] F. Moricz, “Absolutely convergent multiple Fourier series and multiplicative Lipschitz classes of functions”, *Acta Math. Hung.*, **121**:1-2 (2008), 1–19.