Об обратной задаче о резонансах для оператора Шредингера на полуоси

В. Л. Гейнц

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Пусть $SE(\gamma), \gamma > 0$ – пространство, состоящее из всех измеримых функций $q : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\|q\|_{SE(\gamma)} := \int\limits_0^\infty |q(x)| \exp(x^\gamma) dx < \infty.$$

Рассматривается одномерное уравнение Шредингера

$$-y''(x) + q(x)y(x) = z^2 y(x), \ x \in [0, \infty), z \in \mathbb{C}, \ q \in SE(\gamma), \ \gamma > 1.$$

Пусть $\psi_q(z) = y_q(0, z) = 1 + \int\limits_0^\infty K_q(0, t) \exp(izt) dt$, где $K_q(x, t)$ — ядро оператора преобразования [1], а $y_q(x, z)$ — решение Йоста. Тогда $\psi_q(z)$ есть целая функция порядка, не превосходящего $\rho(\gamma) \leqslant \frac{\gamma}{\gamma - 1}$. Нули этой функции, лежащие в нижней полуплоскости, называются резонансами оператора Шредингера. Множество всех нулей функции ψ_q (с учетом кратности) определяет потенциал q однозначно.

В работе [2] рассматривается задача об устойчивости восстановления потенциала q с компактным носителем по резонансам из круга $|z| < R$. В данной работе обобщены результаты [2].

Теорема 1. *Существуют такие положительные константы $R_0 = R_0(\gamma, N)$, $C_0 = C_0(\gamma, N)$, $\alpha = \alpha(\gamma)$, что при всех $R > R_0$ из совпадения в круге $|z| < R$ нулей функций Йоста $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ для потенциалов q_1, q_2, удовлетворяющих условию*

$$\|q_j\|_{SE(\gamma)} \leqslant N,$$

следует, что для всех z из круга $|z| < R^\alpha$

$$|\psi_2(z) - \psi_1(z)| < C_0 R^{-\alpha}.$$

Теорема 2. *Существуют положительные константы R_1, C_1, зависящие от γ, $p \in (1, 2]$, N, M, и константа β, зависящая от γ и p, такие, что при всех $R > R_1$ из совпадения в круге $|z| < R$ нулей функции Йоста $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ для потенциалов q_1, q_2, удовлетворяющих условию*

$$\|q_j\|_{SE(\gamma)} \leqslant N, \|q_2 - q_1\|_{L^p[0,\infty)} \leqslant M,$$

следует, что

$$\sup_{x \geqslant 0} \left| \int\limits_x^\infty (q_2(s) - q_1(s)) ds \right| \leqslant C_1 R^{-\beta}.$$

Список литературы

[1] В. А. Марченко, *Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля*, Наукова Думка, Киев, 1972.

[2] M. Marletta, R. Shterenberg, R. Weikard, “On the inverse resonance problem for Schrodinger operators”, *Comm. Math. Phys.*, **295**:2 (2010), 465–484.