Теорема вложения пространств анизотропных пространств Соболева для областей с нерегулярной границей

А. Ю. Головко

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Математический институт имени В. А. Стеклова РАН

В 1938 году С.Л. Соболев (см., например, [1]) для ограниченных областей $G \subset \mathbb{R}^n$ с условием конуса установил теорему вложения $W_p^s(G) \subset L_q(G)$, характеризуемую неравенством

$$\|f\|_{L_q(G)} \leqslant C\|f\|_{W_p^s(G)} = C\left(\sum_{|\alpha|=s}\|D^\alpha f\|_{L_p(G)} + \|f\|_{L_p(G)}\right),$$

где $1 < p < q < \infty$, $s \in \mathbb{N}$ при выполнении соотношения

$$s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geqslant 0.$$

В дальнейшем эта теорема распространялась на области более общего вида. В 2001 году в [2] О.В. Бесов доказал эту теорему для областей, удовлетворяющих условию гибкого σ-конуса, при выполнении соотношения

$$s - \frac{\sigma(n-1)+1}{p} + \frac{n}{q} \geqslant 0.$$

В 2010 году в [3] О.В. Бесов обобщил эту теорему на случай норм более общего вида (в которые входят сумма норм не всех обобщенных частных производных порядка s).

В данной работе мы обобщаем этот результат на анизотропный по порядку производных и показателям суммируемости случай.

Определение [2]. При $\sigma \geqslant 1$ область $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *областью с условием гибкого σ-конуса*, если при некоторых $T > 0, \varkappa > 0$ для любого $x \in G$ существует кусочно гладкий путь $\gamma : [0, T] \to G, \gamma(0) = x, |\gamma'| \leqslant 1$ почти всюду, и такой, что $\rho(\gamma(t)) \geqslant \varkappa t^\sigma$ при $0 < t \leqslant T$.

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$; $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $1 \leqslant m \leqslant n$, $i_0 = 0$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m = n$ — натуральные числа, $n_j = i_j - i_{j-1}$, $\chi_j : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{0,1\}$,

$$\chi_j(i) = \begin{cases} 1 \quad \text{при} \qquad i_{j-1}+1 \leqslant i \leqslant i_j, \\ 0 \quad \text{при} \qquad 1 \leqslant i \leqslant i_{j-1} \qquad \text{и при} \qquad i_j + 1 \leqslant i \leqslant i_m = n. \end{cases}$$

При $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ положим $\alpha^j := \chi_j\alpha = (0, \ldots, \alpha_{i_{j-1}+1}, \ldots, \alpha_{i_j}, 0, \ldots, 0)$.

Теорема 1. *Пусть G — область с условием гибкого σ-конуса, $\sigma \geqslant 1$; $s_j, m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $l < s_j$, $1 \leqslant q, r < \infty$, $p_j < q$, $r \leqslant q$, $1 < p_j < \infty$ при $j = \overline{1,m}$. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{|\alpha|=l}\|D^\alpha f\|_{L_q(G)} \leqslant C\left(\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=\alpha^j, |\alpha|=s_j}\|D^\alpha f\|_{L_{p_j}(G)} + \|f\|_{L_r(G)}\right)$$

для функций f с конечной правой частью при выполнении для всех $j = \overline{1, m}$ соотношений

$$l - \frac{n}{q} \leqslant s_j - (\sigma - 1) \sum_{i=1, i \neq j}^{m} (s_i - 1) - \frac{\sigma(n-1)+1}{p_j}.$$

Показано, что теорема 1 является неулучшаемой на классе областей с условием гибкого σ-конуса.

Получена также и мультипликативная оценка (неравенство типа Гальярдо-Ниренберга).

Теорема 2. *Пусть G — область с условием гибкого σ-конуса, $\sigma \geqslant 1$; $s_j, m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $l < s_j$, $1 \leqslant q, r < \infty$, $p_j < q$, $r \leqslant q$, $1 < p_j < \infty$ при $j = \overline{1, m}$. Пусть $r < q$ в случае $l = 0$, $\sigma = 1$. Тогда мультипликативное неравенство типа Гальярдо-Ниренберга*

$$\sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_{L_q(G)} \leqslant C \left(\|f\|_{L_r(G)}^{1-\theta} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{\alpha=\alpha^j, |\alpha|=s_j} \|D^\alpha f\|_{L_{p_j}(G)} \right)^{\theta} + \|f\|_{L_r(G)} \right)$$

справедливо для всех функций f с конечной правой частью при выполнении для всех $j = \overline{1, m}$ соотношений

$$l - \frac{n}{q} \leqslant \theta \left(s_j - (\sigma - 1) \sum_{i=1, i \neq j}^{m} (s_i - 1) - \frac{\sigma(n-1)+1}{p_j} \right) +$$

$$(1-\theta) \left(-\frac{n\sigma}{r} - (\sigma - 1) \left(\sum_{i=1}^{m} s_i - m \right) \right).$$

При $m = 1$ для областей с гладкой границей ($\sigma = 1$) теорема 2 совпадает с результатом Гальярдо-Ниренберга для $q > p$, $q \geqslant r$, полученным ими в 1959 году ([4]).в

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00443) в МИАН им. В.А. Стеклова.

Список литературы

[1] Соболев С.Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.*, Наука, Москва, 1988.

[2] Бесов О.В., “Теорема вложения Соболева для областей с нерегулярной границей”, *Математический сборник*, **192**:3 (2001), 3–26.

[3] Бесов О.В., “Интегральные оценки дифференцируемых функций на нерегулярных областях”, *Математический сборник*, **201**:12 (2010), 69–82.

[4] Nirenberg L., “On elliptic partial differential equations”, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, **13(3)**:2 (1959), 115–162.