Точные константы в (q_1, q_2)-обобщенном неравенстве треугольника для Box-квазиметрик некоторых канонических групп Карно

А. В. Грешнов, М. В. Трямкин

Институт математики Сибирского отделения РАН

Неотрицательная функция d_X, определенная на декартовом произведении $X \times X$, где X – некоторое множество, называется (q_1, q_2)-квазиметрикой [1], если выполняются условия

1^0 $d_X(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v \quad \forall u, v \in X$ (аксиома тождества),

2^0 $d_X(u, w) \leqslant q_1 d_X(u, v) + q_2 d_X(v, w) \forall u, v, w \in X$, где q_1, $q_2 > 0$ – некоторые константы ((q_1, q_2)- обобщенное неравенство треугольника).

Пара (X, d_X) называется (q_1, q_2)-квазиметрическим пространством. Если функция d_X дополнительно удовлетворяет условию $d_X(u, v) = d_X(v, u) \forall u, v \in X$, то (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство называется симметрическим.

Эквирегулярные пространства Карно–Каратеодори [2] с Box-квазиметриками [3] являются симметрическими $(1, q_2)$-квазиметрическими пространствами [4]. Примерами эквирегулярных пространств Карно–Каратеодори являются канонические группы Карно. Нами найдены точные (неулучшаемые) значения константы q_2 для Box-квазиметрик канонических групп Карно $\mathbb{H}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$, которые определяются, см. [5], в стандартном пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$ при помощи таблицы коммутаторов $[e_i, e_{n+i}] = \alpha_i e_{2n+1}$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, и их важных частных случаев – одномерной $\mathbb{H}^1_\alpha$ $(n = 1)$ и n-мерной $\mathbb{H}^n_\alpha$ $(\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \alpha)$ канонических групп Гейзенберга, а также для канонических групп Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, которые определяются в стандартном пространстве $\mathbb{R}^4$ при помощи таблицы коммутаторов $[e_1, e_2] = \alpha e_3$, $[e_1, e_3] = \beta e_4$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Работа выполнена при частичной поддержке Гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (Договор № 14.B25.31.0029).

Список литературы

[1] Арутюнов А. В., Грешнов А. В., “Накрывающие отображения в квазиметрических пространствах и пространствах Карно — Каратеодори”, *Известия РАН*, 2015 (в печати).

[2] Gromov M., “Carnot-Caratheodory spaces seen from within”, *Sub-Reimannian geometry*, Birkhäuser, Basel, 1996, 79–323.

[3] Nagel A., Stein E. M., Wainger S., “Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties”, *Acta Math*, 1985, 103–47.

[4] Грешнов А. В., “Доказательство теоремы Громова об однородной нильпотентной аппроксимации для векторных полей класса C^1”, *Мат. труды*, **15**:2 (2012), 72–88.

[5] Agrachev A., Barilari D., Boscain U., “On the Hausdorff volume in sub-Riemannian geometry”, *Calc. Var.*, **43** (2012), 355–388.