О регуляризации решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца

Х. Ш. Джураев

Таджикский национальный университет

Пусть $R = (-\infty, \infty)$–действительная ось, $D = \{-\infty < x < \infty, 0 \leqslant y \leqslant y_0\,(y \geqslant 0)\}$ – полоса или полуплоскость. $C(D)$ – пространство непрерывных функций $u(x,y)$: $(x,y) \in D$ с нормой

$$\|u(x,y)\| = \sup_D |u(x,y)|.$$

Требуется найти функцию $u(x,y)$, непрерывную при $x \in R$ и $y > 0$ из класса $C^2(D)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0, \quad \lambda = const \tag{1}$$

и начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \psi(x), \tag{2}$$

где Δ - оператор Лапласа, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - заданные функции.

Известно, что при произвольных $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ задача (1)-(2) неразрешима. Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – аналитические функции и аналитически продолжимы, то, согласно фундаментальной теореме теории уравнений в частных производных, продолжение осуществимо и единственно. Одноко можно построить пример, подобный примеру Адамара для уравнения Лапласа (см.[1]), который показывает, что полученное продолжение будет неустойчивым к малым изменениям исходных данных. Поэтому задача (1)-(2) относится к числу некорректно поставленных задач.

Пусть в (2) $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям: 1) $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - бесконечно дифференцируемые функции; 2) производные $\varphi^{(k)}(x)$ и $\psi^{(k)}(x)\,(k = 1, 2, \cdots)$ стремятся к нулю при $|x| \to \infty$ быстрее любой отрицательной степени $|x|$. Решение $u(x,y)$ будем искать в классе функций, для которых: а) функции $u(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ абсолютно интегрируемы на всей оси x при любом фиксированном $y \geqslant 0$: б) функции $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ имеют в каждом конечном интервале $0 \leqslant y \leqslant y_0$ интегрируемую мажоранту $n(x)$. Выполним в задаче (1)–(2) преобразование Фурье по x. В силу условий а)–б) и свойств преобразования Фурье в $S(R)$– пространстве Шварца, получаем:

$$\frac{d^2 v(s,y)}{dy^2} - (s^2 - \lambda^2) v(s,y) = 0. \tag{3}$$

По предположению, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям 1)-2). Учитывая свойства преобразования Фурье в $S(R)$, из (2) имеем:

$$v(s,0) = \Phi(s), \quad \frac{dv(s,y)}{dy}\Big|_{y=0} = \Psi(s), \tag{4}$$

где $\Phi(s)$ и $\Psi(s)$ – преобразования Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно. Согласно известной теореме (см. стр. 153 в [1]), функции $\Phi(s)$ и $\Psi(s)$ также являются бесконечно дифференцируемыми и каждая из их производных стремится к нулю при $|s| \to \infty$ быстрее любой отрицательной степени $|s|$. Таким образом, преобразование Фурье задачи (1)-(2) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению (3) с условиями (4). Решение задачи (3)-(4) имеет вид

$$v(s,y)=\Phi(s)cosh(y\sqrt{s^2-\lambda^2})+\Psi(s)\frac{sinh(y\sqrt{s^2-\lambda^2})}{\sqrt{s^2-\lambda^2}}.$$

При каждом фиксированном y это есть функция из пространства $S(R)$ (см. гл. IV в [1], стр. 29 в [2]), следовательно, принадлежит классам $L_1(R)$ и $L_2(R)$. Действительно, так как, по предположению, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям 1)-2), то они принадлежат пространству $S(R)$ (функций от x). Известно также (см. стр. 4 в [3]), что всякая функция $m(x)$ $(x \in R)$ из $S(R)$ принадлежит классам $L_1(R)$ и $L_2(R)$. Тогда на основе свойств преобразования Фурье (см. стр. 153–156 в [1]) функции $\Phi(s)$ и $\Psi(s)$ принадлежат пространству $S(R)$ (функций от s), то есть классам $L_1(R)$ и $L_2(R)$. Следовательно, $v(s,y)$ принадлежит пространству $S(R)$ (функций от s), и значит, классам $L_1(R)$ и $L_2(R)$ для любого фиксированного $y>0$. Обратное преобразование Фурье от $v(s,y)$ есть обычная функция, выражаемая в виде

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\Phi(s)\cosh(y\sqrt{s^2-\lambda^2})+\Psi(s)\frac{\sinh(y\sqrt{s^2-\lambda^2})}{\sqrt{s^2-\lambda^2}}\Big)\exp(ixs)dx. \qquad (5)$$

Следовательно, функция $u(x,y)$ вида (5) при всяком фиксированном $y>0$ есть функция класса $S(R)$ и является решением задачи (1)–(2), поскольку (см. стр. 153–156 в [1]) операторы Фурье F и F^{-1} взаимооднозначно отображают пространство $S(R)$ на себя. Таким образом, мы получили, что если в (2) $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям 1)-2), то решение задачи (1)–(2) существует и выражается в виде (5). Пусть, далее, вместо $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы их приближенния $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ из $L_2(R)$ такие, что

$$\|\tilde{\varphi}(x)-\varphi(x)\|_{L_2(R)}\leqslant\delta, \quad \|\tilde{\psi}(x)-\psi(x)\|_{L_2(R)}\leqslant\delta. \qquad (6)$$

Тогда вместо нахождения $u(x,y)$ можно ставить лишь задачу о нахождении приближенного решения, то есть приближения к $u(x,y)$ с точными исходными данными $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Следуя [5], покажем, что в качестве искомых приближений в этих случаях можно брать значения однопараметрического семейства операторов

$$R_r(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},x,y,\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}r(s,\alpha)\Big(\Phi(s)\cosh(y\sqrt{s^2-\lambda^2})+\Psi(s)\frac{\sinh(y\sqrt{s^2-\lambda^2})}{\sqrt{s^2-\lambda^2}}\Big)\exp(ixs)dx. \qquad (7)$$

с стабилизирующими множительями $r(s,\alpha)$, удовлетворяющими следующим условиям: 1) $r(s,\alpha)$ определена в области $\{\alpha\geqslant 0, -\infty<s<\infty\}$; 2) $0\leqslant r(s,\alpha)\leqslant 1$ для всех значений $\alpha\geqslant 0$ и $s\in R$; 3) $r(s,0)=1$; 4) $\forall\alpha>0$, $r(s,\alpha)$ четная по s и $r(s,\alpha)\in L_2(R)$; 5) $\forall\alpha>0$, $r(s,\alpha)\to 0$ при $|s|\to\infty$; 6) при $\alpha\to 0$ $r(s,\alpha)\to 0$, не убывая, причем на всяком отрезке $|s|\leqslant s_1$, эта сходимость равномерная; 7) $\forall s\neq 0$ $r(s,\alpha)\to 0$ при $\alpha\to\infty$, и эта сходимость равномерная на каждом отрезке $[s_1,s_2]$. Этим условиям отвечает, например, стабилизирующий множитель вида

$$r(s,\alpha)=exp(-\alpha|s|); \quad r(s,\alpha)=exp(-\alpha s^{2n}); \quad r(s,\alpha)=\frac{1}{1+\alpha s^{2n}}$$

для каждого $n\geqslant 1$.

Теорема. *Пусть функция* $u(x,y)$ *вида* (5) *есть точное решение уравнения* (1) *с точными условиями* (2)*,в а* $\tilde{\varphi}(x)$ *и* $\tilde{\psi}(x)$ *– известные приближения из* $L_2(R)$*, удовлетворяющие при данном* $\delta > 0$ *неравенствам* (6)*, и* $y > 0$ *– заданное число. Тогда для каждой функции* $r(s,\alpha)$*, удовлетворяющей условиям* 1)–7)*, оператор* R_r *вида* (7) *является регуляризирующим для задачи* (1)–(2)*, и если параметр* $\alpha = \alpha(\delta)$ *есть корень уравнения*

$$\sqrt{\omega(y,\alpha)} + \sqrt{\nu(y,\alpha)} = \frac{\varepsilon}{2\delta},$$

причем $\lim_{\delta\to 0}\alpha(\delta) = 0$*, то при* $\delta \to 0$ $R_r(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},x,y,\alpha)$ *сходится к функции* $u(x,y)$.

Список литературы

[1] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, 3-е изд., Наука, М., 1986, 288 pp.

[2] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Вып. 1, Физматгиз, М., 1958, 440 pp.

[3] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Пространства основных и обобщонных функций*, Вып. 2, Физматгиз, М., 1958, 308 pp.

[4] Г. Е. Шилов, *Некоторые вопросы теории преобразования Фурье*, Изд. МГУ, М., 1968, 10 pp.

[5] Х. Ш. Джураев, “Регуляризация граничных задач для гиперболического уравнения”, *Матем. заметки*, **93**:2 (2013), 202–208