Критерии вложения анизотропных классов Соболева–Морри

М. А. Жайнибекова, Г. Т. Джумакаева

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева

Классическая теорема С.Л. Соболева [1] утверждает, что при $rp \neq s$ для вложения класса Соболева $W_p^r\left(0,1\right)^s$в пространство равномерно непрерывных на $\left(0,1\right)^s$ функций $C\left(0,1\right)^s$ необходимо и достаточно выполнение неравенства $rp > s$.

С позиций теории вложений функциональных пространств и их приложений интересен вопрос о переходе к более узким классам r раз дифференцируемых функций с производными из лебегова пространства $L^p\left(0,1\right)^s$, для которых выполнено вложение в $C\left(0,1\right)^s$ при $rp < s$.

В определениях и обозначениях из [1-2] справедлива

Теорема 1. *Пусть даны целые положительные числа $s, r_1, \ldots, r_s$, положительные числа $\aleph_j$ $(j = 1, \ldots, s)$, действительное число $1 \leqslant p < \infty$ и неубывающая на $(0,1]$ положительная функция $\Phi\left(\delta\right)$, удовлетворяющая условию $\Phi\left(2\delta\right) \ll \Phi\left(\delta\right)$. Тогда для того чтобы имело место вложение*

$$W^{r_1,\ldots,r_s}_{p;\Phi;\aleph_1,\ldots,\aleph_s}\left(0,1\right)^s \subset C\left(0,1\right)^s$$

достаточно, а в случае выполнения условий $\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j} \neq 1,\ \ r_\tau\aleph_\tau = 1\ \ (\tau = 1,\ldots,s)$ и $\eta\omega\left(\delta\right) \leqslant C\delta\omega\left(\eta\right)$ $(0 < \eta < \delta < 1)$ необходимо, чтобы

$$\int_0^1 \delta^{\left(1-\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}\right)\frac{\max\limits_{\tau=1,\ldots,s} r_\tau\aleph_\tau}{\aleph_1+\ldots+\aleph_s}}\Phi(\delta)\frac{d\delta}{\delta} < +\infty.$$

При $r_1 = \ldots = r_s = r$, $\aleph_1 = \ldots = \aleph_s$ эта теорема сводится к теореме из [2]:

$$W^{r}_{p;\Phi;1,\ldots,1}\left(0,1\right)^s \subset C\left(0,1\right)^s \ \Leftrightarrow\ \int_0^1 \delta^{\frac{r}{s}-\frac{1}{p}}\cdot\Phi(\delta)\frac{d\delta}{\delta} < +\infty.$$

Достаточное условие для вложения

$$W^{r_1,\ldots,r_s}_{p;\Phi;\aleph_1\ldots\aleph_s}(0,1)^s \subset D^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}L^q(0,1)^s \tag{1}$$

при $1 \leqslant p < q < \infty$ состоит в сходимости интеграла

$$\int_0^1 \vartheta^{-\sum_{j=1}^{s}\frac{\alpha_j}{r_j}-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}}\,\Phi^{1-\frac{p}{q}}\left(\vartheta^{\frac{\aleph_1+\ldots+\aleph_s}{\max\limits_{\tau=1,\ldots,s} r_\tau\aleph_\tau}}\right)d\vartheta < +\infty. \tag{2}$$

Не исключено, что условие (2) и необходимо для вложения (1), во всяком случае в ряде случаев это действительно так.

Теперь обратимся к случаю $rp = s$, впервые изученному в [3], краткий обзор последующих результатов дан в [1, стр. 133-134].

Теорема 2. *Пусть* $\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}=1$. *В случае* $\Phi(\delta)=\log^{-\beta}\frac{1}{\delta}\quad(0<\delta<1;\,\beta>0)$ *вложение*

$$W^{r_1,\ldots,r_s}_{p=\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j},\Phi,\aleph_1,\ldots,\aleph_s}(0,1)^s\subset(0,1)^s,$$

имеет место при $\beta>1$ *и при всех* $\aleph_j>0\;(j=1,\ldots,s)$ *и не имеет места при* $\beta\leqslant 1-\frac{1}{p}\;(p>1)\,,\aleph_j=\frac{1}{r_j}\,(j=1,...,s)\,.$

Замечание. Теорему 2 можно рассматривать как распространение теоремы 10.4 из [1, стр. 129-130] на случай $\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}=p$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$. Здесь случай $1-\frac{1}{p}<\beta\leqslant 1$ остается открытым. Не исключено, что вложение (3) имеет место во всех этих случаях.

В заключение отметим, что полученные здесь результаты частично анонсированы в [4].

Список литературы

[1] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1996.

[2] Г. Т. Джумакаева, “Интегральные представления функций и теоремы вложения”, *Матем. заметки*, **37**:3 (1985), 399–406.

[3] С. Л. Соболев, “Об одной теореме функционального анализа”, *Мат. сб.*, **4**:3 (1938), 471–497.

[4] Н. Темиргалиев, М. А. Жайнибекова, Г. Т. Джумакаева, “Критерии вложения классов типа Морри”, *Изв. вузов. Матем.*, 2015, № 5, 80–85.