О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам

А. Ж. Жубанышева, Ш. К. Абикенова

Евразийский национальный университет имени Л. Н. Гумилева

В ряде вопросов теории приближений полезной оказывается следующая (случай $p = 2$ см. в [1])

Лемма. *Пусть даны целые положительные числа s и $N = n^s$ $(n = 5, 6, ...)$, функция $\omega(t)$ из C^{∞} $(-\infty, +\infty)$ такая, что $supp\omega = [0, 1]$, $0 \leqslant \omega(t) \leqslant 1 = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \omega(t)$. Определим на $[0, 1]^s$ ортогональную систему (с 1-периодическим продолжением по каждой переменной)*

$$\psi_k(x) = \prod_{j=1}^{s} \omega\left(4n\left(x_j - \frac{k_j}{4n}\right)\right), (k \in A_N \equiv \{k = (k_1, ..., k_s) \in Z^s, 0 \leqslant k_j \leqslant 4n - 1 \ (j = 1, ..., s)\}).$$

Тогда для всякого набора линейных функционалов $l_1, ..., l_N$, определенных, по крайней мере, на множестве всех многочленов по системе ψ_k, существует конечная последовательность $\{b_k : k \in A_N\}$ такая, что для функции $B_N(x) \equiv B_N(x; l_1, ..., l_N) = \sum_{k \in A_N} b_k \psi_k(x)$ выполнены равенства $l_1(B_N) = ... = l_N(B_N) = 0$ и для всякого набора целых неотрицательных чисел $\lambda_1, ..., \lambda_s$ и всякого $1 \leqslant p \leqslant \infty$ имеют место соотношения

$$\left\| B_N^{(\lambda_1, ..., \lambda_s)} \right\|_{L^p(0,1)^s} \succ\prec N^{\frac{\lambda_1 + ... + \lambda_s}{s} - \frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in A_N} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ при } 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\left\| B_N^{(\lambda_1, ..., \lambda_s)} \right\|_{L^p(0,1)^s} \succ\prec N^{\frac{\lambda_1 + ... + \lambda_s}{s} + 1}, \ p = \infty$$

В качестве следствия при $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ и $s = 1, 2, ...$ получаем известные оценки снизу для поперечников «кодирования» функций из соболевских классов $W_p^r(0, 1)^s$ (условия на задействованные параметры считаются такими, что все показатели при N отрицательны):

$$\lambda^N \left(W_p^r(0, 1)^s \right)_{L^q(0,1)^s} \equiv \inf_{\substack{l_1, ..., l_N - \text{всевозможные} \\ \text{линейные функционалы}}} \ \sup_{\substack{f \in W_p^r(0,1)^s \\ l_\tau(f) = 0, \\ (\tau = 1, ..., N)}} \|f\|_{L^q(0,1)^s}$$

$$\ll \begin{cases} N^{-\frac{r}{s} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}, \text{если } 2 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty, \\ N^{-\frac{r}{s} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}}, \text{ если } 1 \leqslant p < 2 \leqslant q \leqslant +\infty, \\ N^{-\frac{r}{s}}, \text{если } 1 \leqslant p \leqslant q < 2. \end{cases}$$

Еще одним следствием является другое доказательство порядковых соотношений для поперечников по Колмогорову функциональных классов, в которых основной метод решения заключается в редуцировании к конечномерным задачам о поперечниках обобщенных конечномерных октаэдров (порядковые соотношения для поперечников по Колмогорову при различных соотношениях параметров получены в работах В. М. Тихомирова, Р. С.

Исмагилова, Б. С. Кашина, Ю. И. Маковоза, М. Ш. Бирмана, М. З. Соломяка, В. Н. Темлякова, Э. М. Галеева, Е. Д. Куланина и др.). Здесь же, применением принципа двойственности для поперечников по Колмогорову $d_N(\tilde{W}_p^r(0,1)^s)_{L^q(0,1)^s}$ и «кодирования» функций $\lambda^N(\tilde{W}_{q'}^r(0,1)^s)_{L^{p'}(0,1)^s}$ (благодарим Э. М. Галеева за указание на нее для периодических классов Соболева $\tilde{W}_p^r(0,1)^s$ функций с нулевым средним) и из теоремы 1 в [1] в случае $1 < p \leqslant q \leqslant 2$ приходим к соотношениям (см. также [2-3])

$$2\lambda^N(\tilde{W}_{q'}^r(0,1)^s)_{L^{p'}(0,1)^s} = d_N(\tilde{W}_p^r(0,1)^s)_{L^q(0,1)^s} \succ\prec N^{-\frac{r}{s}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta'}=1\right).$$

Список литературы

[1] Ш. У. Ажгалиев, Н. Темиргалиев, *Матем. заметки*, **3**:6 (2003), 803–812.

[2] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, “Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи”, *УМН*, **23**:6 (144) (1968), 51–116.

[3] `http://galeevem.math.msu.su/get_file-uuid=5abf5305-5cf3-4868-8b18-25b0b8205f50&groupId=3557763.pdf`.