Приближенное дифференцирование функций по информации, полученной со всех линейных функционалов в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника (К(В)П)

А. Ж. Жубанышева, Н. Темиргалиев

Институт теоретической математики и научных вычислений
Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева

Отправным результатом К(В)П-исследования (здесь придерживаемся определений и обозначений из [1-2]) задачи приближенного дифференцирования является следующая оценка снизу, полученная для всех возможных вычислительных агрегатов, построенных по произвольной линейной информации (все естественные условия корректности считаются наложенными):

$$\inf_{\substack{l_1,\dots,l_N - \text{все возможные} \\ \text{линейные функционалы};\varphi_N}} \sup_{f\in W_p^r(0,1)^s} \left\| f^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(\cdot) - \varphi_N\left(l_1(f),\dots,l_N(f);\cdot\right)\right\|_{L^q(0,1)^s}$$

$$\ll \begin{cases} N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, & \text{если } \ 2\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty \\ N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s}+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}, & \text{если } \ 1\leqslant p<2\leqslant q\leqslant+\infty \\ N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s}}, & \text{если } \ 1\leqslant p\leqslant q<2 \end{cases}.$$

Каждый вычислительный агрегат, подтверждающий оценку снизу по всем вычислительным агрегатам, построенным по произвольной линейной информации, сразу же попадает в разряд неулучшаемых по порядку (разумеется при своих заданных условиях). Установлено, что к таковым в случае $2\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$ относятся $(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$ – производные частичных сумм по кубам тригонометрического ряда Фурье (что есть решение задачи К(В)П-1). Далее показано, что с сохранением порядка $\succ\prec N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$ восстановления по точной информации, при восстановлении по неточной информации произвольными вычислительными агрегатами $\varphi_N(z_1,\dots,z_N;x)$ функционалы $l_1,\dots,l_N$ можно вычислять с погрешностью

$$\left|l_\tau(f)-z_\tau\right|\leqslant\tilde{\varepsilon}_N\equiv N^{-\frac{r}{s}-\left(1-\frac{1}{p}\right)} \qquad (\tau=1,\dots,N),$$

причем эта погрешность является предельной (что есть решение задачи К(В)П-2). Наконец, и это составляет содержание задачи К(В)П-3, установлено, что во всех вычислительных агрегатах вида $\varphi_N(\hat{f}\left(m^{(1)}\right),\dots,\hat{f}\left(m^{(N)}\right);x)$ построенных по неточной информации об $\hat{f}\left(m^{(\tau)}\right)$, величину ошибки $\tilde{\varepsilon}_N$ в К(В)П-2, вообще говоря, нельзя заменить на $\eta_N\tilde{\varepsilon}_N$ при любом неограниченно возрастающем η_N.

С вычислительных позиций можно отметить продолжение исследований: строятся конкретные вычислительные агрегаты, пусть и не подтверждающие оценки снизу, но покрывающие эти потери за счет выигрыша в вычислениях. Подлежащим к таким заменам можно отнести частичные суммы тригонометрических рядов Фурье со спектром из "‘больших"’ коэффициентов класса или индивидуальной функции, свидетельствующие о высоких аппроксимативных возможностях гармонического анализа, но с низким вычислительным потенциалом,-хорошее в теории может быть не совсем удовлетворительным на практике.

Список литературы

[1] Н. Темиргалиев, К. Е. Шерниязов, М. Е. Берикханова, “Точные порядки компьютерных (вычислительных) поперечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона по коэффициентам Фурье”, *Математика и информатика*. 2, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Современные проблемы математики, **17**, МИАН, 2013, 179–207.

[2] Н. Темиргалиев, Ш. К. Абикенова, А. Ж. Жубанышева, Г. Е. Таугынбаева, “Задачи дискретизации решений волнового уравнения, численного дифференцирования и восстановления функций в контексте компьютерного (вычислительного) поперечника”, *Изв. ВУЗов. Математика*, 2013, № 8, 86–93.