Внешняя вариационная задача Дирихле для вырождающегося эллиптического оператора с суммируемыми коэффициентами

С. А. Исхоков

Институт математики Академии наук Республики Таджикистан

Пусть Ω - ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве R^n с $(n-1)$-мерной гладкой границей $\partial\Omega$ и пусть $\Omega^* = R^n \setminus \overline{\Omega}$. Символом K_R обозначим открытый шар достаточно большого радиуса R с центром в начале координат такой, что $\overline{\Omega} \subset K_R$. Пусть $\rho(x)$ – регуляризованное расстояние от $x \in \Omega^*$ до $\partial\Omega$ и α, β - вещественные числа. Символом $\sigma(x)$ обозначим бесконечно дифференцируемую положительную в Ω^* функцию, которая ведет себя как $\rho^\alpha(x)$ вблизи $\partial\Omega$ и как $\rho^\beta(x)$ в $R^n \setminus K_R$. Пусть r - натуральное число, $1 \leqslant p < +\infty$ и φ - непрерывная в Ω^* положительная функция. Введем весовое пространство $W^r_{p;\alpha,\beta;\varphi}(\Omega^*)$ всех измеримых в Ω^* комплекснозначных функций $u(x)$ с конечной нормой

$$\left\|u;\, W^r_{p;\alpha,\beta;\varphi}(\Omega^*)\right\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{\Omega^*} \sigma^p(x)|u^{(k)}(x)|^p dx + \int_{\Omega^*} \varphi^p(x)|u(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

где $u^{(k)}(x)$ - обобщенная по С.Л.Соболеву производная функции $u(x)$ мультииндекса k. Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{p;\alpha,\beta;\varphi}(\Omega^*)$ пополнение класса $C_0^\infty(\Omega^*)$ в норме пространства $W^r_{p;\alpha,\beta;\varphi}(\Omega^*)$, а через $\left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{p;\alpha,\beta;\varphi}(\Omega^*)\right)'$ - пространство антилинейных непрерывных функционалов, определенных на $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{p;\alpha,\beta;\varphi}(\Omega^*)$, наделенное нормой сопряженного пространства.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$B[u,\, v] = \sum_{|k|,\,|l|\leqslant r} \int_{\Omega^*} a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx$$

с комплекснозначными коэффициентами $a_{kl}(x)$.

В докладе обсуждается вопрос о разрешимости следующей задачи Дирихле:

Задача D_λ. Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta;\varphi}(\Omega^*)\right)'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U,\, v] + \lambda \int_{\Omega^*} \varphi^2(x)U(x)\overline{v(x)}\, dx = \langle F,\, v\rangle \qquad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega^*)),$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\alpha,\beta;\varphi}(\Omega^*)$.

Доказана однозначная разрешимость задачи D_λ для некоторых значений параметра λ, когда старшие коэффициенты a_{kl}, $|k| = |l| = r$, удовлетворяют условию эллиптичности

$$\mathrm{Re} \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l \geqslant c_0\sigma(x)\xi^{2r} \quad (x \in \Omega^*,\, \xi \in R^n) \tag{1}$$

и младшие коэффициенты a_{kl}, $|k|+|l|\leqslant 2r-1$, принадлежат некоторым весовым $L_{p_{kl}}$-пространствам.

Разрешимость задачи D_λ ранее исследовалась в работах [1], [2] в предположении, что коэффициенты a_{kl}, $|k|,|l|\leqslant r$, имеют форму произведения ограниченной функции и некоторой степени функции $\rho(x)$ и такие, что

$$\mathrm{Re}\sum_{|k|,|l|\leqslant r} a_{kl}(x)\zeta_k\overline{\zeta_l}\geqslant c_0\sigma(x)\sum_{|k|=r}|\zeta_k|^2 \tag{2}$$

для всех $x\in\Omega$ и любого набора комплексных чисел $\zeta=\{\zeta_k\}_{|k|\leqslant r}$. Условие (1) слабее условии (2).

Список литературы

[1] Мирошин Н.В., “Спектральные внешние задачи для вырождающегося эллиптического оператора”, *Известия вузов. Математика*, 1988, №8, 47–55.

[2] Мирошин Н.В., “Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора с вырождением”, *Труды Математического института РАН*, **194** (1992), 179–195.

[3] Исхоков С.А., “Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением”, *Математические заметки*, **87**:2 (2010), 201- 216.

[4] Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.И., “Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений”, *Известия Вузов. Математика*, 1988, №8, 4–30.