Метрические свойства гармонической меры на жордановых кривых

И. Р. Каюмов

Казанский (Приволжский) федеральный университет

Пусть Ω - односвязная область на плоскости, ограниченная жордановой кривой $\partial\Omega$. Пусть E - произвольное борелевское множество на этой кривой. Через $\omega_z(E)$ обозначим гармоническую меру множества E относительно точки $z \in \Omega$. Зафиксируем точку $z_0 \in \Omega$ и будем рассматривать функцию $\omega(E) = \omega_{z_0}(E)$ как функцию на борелевских множествах кривой $\partial\Omega$. Полученная таким образом мера ω не зависит от выбора точки $z_0 \in \Omega$.

Из классической теоремы Рисса-Привалова следует, что если $\partial\Omega$ является спрямляемой кривой, то ω абсолютно непрерывна относительно линейной меры Лебега на этой кривой. М.А. Лаврентьевым построен пример такой жордановой кривой $\partial\Omega$, что ω не является абсолютно непрерывной мерой относительно линейной меры Лебега на этой кривой.

В 1972 году Л. Карлесон показал, что существует положительное число $\alpha > 0$ такое, что ω абсолютно непрерывна относительно $\Lambda_{1/2+\alpha}$, где $\Lambda_{1/2+\alpha}$ - φ-мера Хаусдорфа с функцией $\varphi(t) = t^{1/2+\alpha}$.

В 1985 году Н.Г. Макаров существенно усилил этот результат показав, что существует постоянная $C > 0$ такая, что ω абсолютно непрерывна относительно Λ_φ, где

$$\varphi(t) = t \exp\left(C \sqrt{\log \frac{1}{t} \log\log\log \frac{1}{t}} \right).$$

С. Роде и Х. Поммеренке (1991) показали, что в качестве C можно взять число 30. Автором эта константа была понижена до $6\sqrt{3}$.

Пусть C_M - минимальная константа для которой гармоническая мера абсолютно непрерывна относительно Λ_φ. Совместно со шведским математиком Х. Хеденмальмом удалось получить оценки

$$0.91 \leqslant C_{\mathrm{M}} \leqslant 2\sqrt{\frac{\sqrt{24}-3}{5}} = 1.2326\ldots.$$

Оценка снизу получена путем построения конформных снежинок с большой фрактальной размерностью границы.

Кроме того, в докладе предполагается обсудить и указать связь наших оценок C_M с недавними результатами К. Макмюллена [1], связанных с динамикой размерности жордановых кривых фрактального типа.

Список литературы

[1] C. T. McMullen, “Thermodynamics, dimension and the Weil–Petersson metric”, *Invent. math.*, **173** (2008), 365–425.