О числовом образе одного класса квадратичных форм и собственных значениях эллиптических операторов

А. Б. Костин

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

В унитарном пространстве V со скалярным произведением $(f,g)_V$ и нормой $\|f\|_V$ рассмотрим две полуторалинейные формы $\mathcal{L}_0\big(f,g\big)$ и $\mathcal{Q}\big(u,v\big)$ с областями определения $D\big(\mathcal{L}_0\big)\times D\big(\mathcal{L}_0\big)$ и $D\big(\mathcal{Q}\big)\times D\big(\mathcal{Q}\big)$ такими, что $D\big(\mathcal{L}_0\big)\subseteq D\big(\mathcal{Q}\big)\subseteq V$. Будем предполагать, что форма $\mathcal{L}_0$ является эрмитовой, т. е.

$$\forall f,\, g\in D\big(\mathcal{L}_0\big)\qquad \mathcal{L}_0\big(f,g\big)=\overline{\mathcal{L}_0\big(g,f\big)} \tag{1}$$

и, кроме того, найдутся числа $p>0$, $q\in\mathbb{R}$ такие, что для всех элементов $f\in D\big(\mathcal{L}_0\big)$ с нормой $\big\|f\big\|_V=1$ справедлива оценка

$$\mathcal{L}_0\big(f,f\big)\geqslant p\,\big|\mathcal{Q}\big(f,f\big)\big|^2+q\,\big(f,f\big)_V \tag{2}$$

Рассмотрим возмущённую форму $\mathcal{L}\big(f,g\big)=\mathcal{L}_0\big(f,g\big)+\mathcal{Q}\big(f,g\big)$ с областью определения $D\big(\mathcal{L}\big)\times D\big(\mathcal{L}\big)$, где $D\big(\mathcal{L}\big)=D\big(\mathcal{L}_0\big)$. Множество значений, которые принимает функция $\mathcal{L}\big(f,f\big)$, когда $f\in D\big(\mathcal{L}\big)$, $\big\|f\big\|_V=1$, будем называть числовым образом формы $\mathcal{L}$ и обозначать $\Theta\big(\mathcal{L}\big)$ (см. [1]). Собственным значением формы $\mathcal{L}\big(f,g\big)$, как обычно, называется число $\lambda\in\mathbb{C}$ такое, что существует ненулевой элемент $h\in D\big(\mathcal{L}\big)$, для которого выполнено равенство $\mathcal{L}\big(h,g\big)=\lambda\big(h,g\big)_V$ при любом элементе $g\in D\big(\mathcal{L}\big)$. Отметим, что всякое собственное значение $\lambda\in\Theta\big(\mathcal{L}\big)$.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (1), (2). *Тогда числовой образ* $\Theta\big(\mathcal{L}\big)$ *квадратичной формы* $\mathcal{L}\big(f,f\big)$ *лежит во множестве*

$$\mathcal{D}_0(p,q)\equiv\bigcap_{\varepsilon\in(0,p]}\mathcal{D}(\varepsilon;p,q)\,,\qquad \text{где семейство множеств } \mathcal{D} \text{ имеет вид}$$

$$\mathcal{D}(\varepsilon;p,q)\equiv\Big\{\lambda=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}\mid \alpha\geqslant(p-\varepsilon)|\beta|^2-\frac{1}{4\varepsilon}+q\Big\}.$$

Множество $\mathcal{D}_0$ может быть найдено прямым вычислением.

$$\mathcal{D}_0=\begin{cases}\alpha\geqslant p\,\beta^2-|\beta|+q, & \text{если } |\beta|\geqslant\dfrac{1}{2p};\\[2ex] \alpha\geqslant q-\dfrac{1}{4p}, & \text{если } |\beta|\leqslant\dfrac{1}{2p}.\end{cases}$$

Из этой теоремы в качестве следствия получен результат о расположении на плоскости $\mathbb{C}_\lambda$ собственных значений достаточно широкого класса линейных (не обязательно эллиптических) операторов. Приведены примеры эллиптических операторов, показывающие асимптотическую точность найденного множества $\mathcal{D}_0$, которое в свою очередь лежит внутри любой из парабол Гепперта–Карлемана ([2], [3]).

Список литературы

[1] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[2] H. Geppert, "Über Randwertprobleme bei linearen eliptischen Differential-gleichungen", *Mathematische Annalen*, **98**:2 (1927), 264–272.

[3] T. Carleman, "Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen", *Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Math.-Phys. Klasse*, **88** (1936), 119–132.

[4] В. А. Ильин, Е. И. Моисеев, "Об отсутсвии свойства базисности у системы корневых функций задачи с наклонной производной", *Дифференц. уравнения*, **30**:1 (1994), 128–143.

[5] А. Б. Костин, "О комплексных собственных значениях эллиптического оператора и примере неединственности решения обратной задачи", *Доклады Академии Наук*, **453**:2 (2013), 138–141.