О построении масштабирующих функций, порождающих ортогональный КМА на локальных полях положительной характеристики.

Ю. С. Крусс

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Локальное поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p изоморфно пространству бесконечных в обе стороны последовательностей $x = (..., \mathbf{0}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, ...)$, $\mathbf{x}_j \in GF(p^s)$, где $GF(p^s)$ конечное поле. Известно, что при $s = 1$: $F^{(1)+}$ (- аддитивная группа поля $F^{(1)}$) есть группа Виленкина с постоянной образующей последовательностью $p_n = p$. А при $s > 1$ аддитивная группа $F^{(s)+}$ изоморфна произведению групп Виленкина [1], т.е.

$$F^{(s)+} \cong F^{(1)+} \times F^{(1)+} \times ... \times F^{(1)+} = \left(F^{(1)+}\right)^s.$$

Обозначим через $F_k^{(s)} = \{(..., \mathbf{0}, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, ...), \mathbf{x}_i \in GF(p^s)\}$ подгруппы группы $F^{(s)+}$. Множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе $F_M^{(s)}$ с носителем $\mathrm{supp}(\varphi) \subset F_{-N}^{(s)}$ обозначим через $\mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$, $M, N \in \mathbb{N}$. Аналогично, $\mathfrak{D}_{-N}({F_M^{(s)}}^{\perp})$ есть множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе ${F_{-N}^{(s)}}^{\perp}$ с носителем $\mathrm{supp}(\varphi) \subset {F_M^{(s)}}^{\perp}$. Если функция $\varphi \in \mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$ порождает ортогональный КМА, то она удовлетворяет масштабирующему уравнению $\varphi(x) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h$ $\varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h)$, которое можно записать в частотном виде

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}), \tag{1}$$

где $m_0(\chi) = \frac{1}{p} \sum\limits_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \overline{(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)}$ - маска уравнения (1), $\mathcal{A}$ - оператор растяжения, χ - характер группы $F^{(s)+}$.

Известно, что на группах Виленкина задача построения ступенчатой масштабирующей функции сводится к построению некоторого дерева [2]. Однако рассматриваемый класс функций состоит только из (N, M)-элементарных функций [2] (т.е. функций, модуль которых принимает значения 0 или 1), и поэтому является довольно узким. Оказалось, что можно построить ступенчатую масштабирующую функцию, принимающую дробные значения, по прежнему используя теорию графов, а также обобщить это для локальных полей положительной характеристики.

Построим дерево $\tilde{T}$, ориентированное от листа к корню и удовлетворяющее следующим условиям:

1) Каждая вершина представляет собой элемент поля $GF(p^s)$: $\mathbf{a}_j = (a_j^{(0)}, a_j^{(1)}, \dots, a_j^{(s-1)})$ и встречается в дереве только один раз.

2) Нулевой элемент поля $GF(p^s)$ $\mathbf{0} = (0^{(0)}, 0^{(1)}, \dots, 0^{(s-1)})$ является корнем дерева.

Теперь по данному дереву построим взвешенный граф Γ, добавив некоторое количество ориентированных ребер от вершин более высокого уровня к вершинам более низкого уровня, таким образом, чтобы сумма весов всех ребер, исходящих из одной вершины, равнялась единице. Обозначим

$$\lambda_{\mathbf{a}_{-1}, \mathbf{a}_0} = |m_0({F_{-1}^{(s)}}^{\perp} \mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{-1}} \mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0})|^2, \tag{2}$$

где ${F_{-1}^{(s)}}^{\perp}$ - аннулятор подгруппы $F_{-1}^{(s)}$, $\mathbf{r}_i^{\mathbf{a}_i} = r_{is}^{a_i^{(0)}} r_{is+1}^{a_i^{(1)}} \dots r_{is+s-1}^{a_i^{(s-1)}}$, $r_{is+l}(x) = e^{\frac{2\pi i}{p} x_i^{(l)}}$ – функция Радемахера.

Теорема. *Пусть построены дерево $\tilde{T}$, граф Γ и определены значения маски $m_0(\chi)$ так, как указано в равенствах* (2). *Тогда равенство*

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi \mathcal{A}^{-k}) \in \mathfrak{D}_{-1}({F_M^{(s)}}^{\perp})$$

определяет масштабирующую функцию $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_M(F_{-1}^{(s)})$, порождающую ортогональный КМА, причем M не превышает $H-1$, где H высота дерева $\tilde{T}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00102).

Список литературы

[1] S. F. Lukomskii, A. M. Vodolazov, *Non-Haar MRA on local field of positive characteristic*, arXiv: 1407.4069.

[2] G. S. Berdnikov, S. F. Lukomskii, *N-valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups*, arXiv: 1412.3096.