Об эллиптических операторах с разрывными коэффициентами в неограниченных областях с угловыми точками

Р. Лагерр

Российский университет дружбы народов

Для неограниченных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с компактными и некомпактными кусочно-C^1 границами $\partial\Omega$, имеющими конечное число конечных и бесконечных угловых точек, исследуются вопросы существования и единственности слабых решений краевой задачи Неймана для эллиптического уравнения в дивергентной форме: $div(a\nabla u) = divf$ с разрывными кусочно-постоянными коэффициентами a. Под конечной или бесконечной угловой точкой $\partial\Omega$ подразумевается конечная или бесконечно удаленная вершина отличного от π угла между парой кривых класса C^1, имеющих в вершине предельные нормали, тогда как вершина угла, равного π, считается точкой гладкости $\partial\Omega$. Бесконечные угловые точки называют также выходами на бесконечность.

Предполагается, что скалярные коэффициенты a имеют конечное число кусочно-гладких компактных и некомпактных линий разрыва коэффициентов, состоящих из замкнутых кусков гладких кривых Γ_k класса C^1, на которых заданы естественные условия сопряжения, т.е. непрерывности решения и его производной по конормали $\nu_a = a\nu$ к соответствующей кривой Γ_k с нормалью ν. Угловые точки $\partial\Omega$ могут оказаться точками разрыва коэффициентов — для бесконечной угловой точки это означает, что хотя бы две кривые Γ_k уходят на бесконечность, имея там предельные нормали. Краевая задача с однородными условиями Неймана на $\partial\Omega$ и с условиями сопряжения на Γ_k решается в обобщенной постановке в смысле стандартного интегрального тождества для класса слабых решений $\nabla u \in L_p(\Omega)$ с заданной векторнозначной $f \in L_p(\Omega)$. Такую постановку удобно рассматривать как обобщенную постановку краевой задачи Неймана для системы первого порядка, эллиптической по Дуглису-Ниренбергу. Важно, что при наличии двух и более бесконечных угловых точек (т.е., выходов на бесконечность) с ненулевыми углами, корректная обобщенная постановка задачи Неймана при $p > 2$ требует пробных функций, выходящих на свою произвольную константу по каждому выходу на бесконечность с ненулевым углом. Вычисление размерностей ядра и коядра соответствующего матричного дифференциального оператора и является главной целью настоящей работы, продолжающей исследования, начатые в [1,2], где рассмотрены случаи $\Omega = \mathbb{R}^2$ и краевая задача с однородными условиями Дирихле в случае $\Omega \neq \mathbb{R}^2$. Краткое изложение истории вопроса можно найти в [1], а более подробное — в [2].

К особым точкам замыкания $\overline{\Omega}$ относятся все точки, характер которых определяет замкнутость или незамкнутость области значений рассматриваемого эллиптического оператора, а также размерности его ядра и коядра относительно всей шкалы значений показателя $p \in (1, \infty)$. Помимо конечных и бесконечных угловых точек $\partial\Omega$, особыми точками становятся все точки гладкости $\partial\Omega$, из которых выходят хотя бы две кривые Γ_k, тогда как в случае только одной кривой Γ_k точка гладкости $\partial\Omega$ будет особой, если только Γ_k выходит из нее под углом к $\partial\Omega$, отличным от прямого. Особыми будут также и все внутренние точки Ω, из которых выходят хотя бы две кривые Γ_k. При этом в случае только двух кривых, угол между ними отличен от π и особая точка является точкой излома линии разрыва коэффициентов. В случае компактной $\partial\Omega$ бесконечность рассматривается как внутренняя точка, которая может оказаться особой, если из нее выходят хотя бы две кривые Γ_k.

Каждой особой точке соответствует своя модельная задача Штурма–Лиувилля по полярному углу с условиями сопряжения и однородными условиями Неймана. Но для класса решений $\nabla u \in L_p(\Omega)$ интерес представляют только собственные числа модельных задач Штурма–Лиувилля $\lambda \in (-1, 0)$ — именно они увеличивают размерности ядра и коядра по шкале значений показателя $p \in (1, \infty)$, т.е., характер каждой особой точки определяется количеством именно таких ее собственных чисел.

Для рассматриваемого эллиптического оператора в случае условий Неймана установлено, что размерности его ядра и коядра по всей шкале значений показателя $p \in (1, \infty)$ совпадают с размерностями для случая условий Дирихле [2], за исключением областей, имеющих не менее двух выходов на бесконечность с ненулевыми углами, т.е., за исключением случая, который в [2] не рассматривался.

Список литературы

[1] Дудкина А.А., “К L_p-теории эллиптических операторов с разрывными коэффициентами”, *ДАН*, **430**:3 (2010), 304–307.

[2] Дудкина А.А., *К L_p-теории эллиптических краевых задач с разрывными коэффициентами*, Канд. дисс., РУДН, М., 2010.