Решение функционального уравнения для систем с медленно движущимися границами

В. Л. Литвинов

Самарский государственный технический университет

Пусть движение системы описывается волновым уравнением

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau) - U_{\xi\xi}(\xi,\tau) = 0 \tag{1}$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} &U(0,\tau) = 0 \\ &U(l(\tau),\tau) = F(\tau) \\ &l(0) = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь τ, ξ – безразмерное время ($\tau \geqslant 0$) и безразмерная пространственная координата, $l(\tau)$ – закон движения правой границы (левая граница неподвижна, но это не отменяет общности задачи), $F(\tau)$ – заданная функция класса C^1.

В работе [1] в результате решения исходной задачи (1) с помощью представления Даламбера получено функциональное уравнение

$$\varphi(\tau + l(\tau)) = \varphi(\tau - l(\tau)) + 1. \tag{3}$$

Для решения (3) А.И. Весницким [2] был использован обратный метод, т.е. по заданным находились законы движения границ. В данной статье для решения уравнения (3) предлагается использовать асимптотический метод.

При неподвижных границах ($l(\tau) = l$) решением уравнения (3) является линейная функция

$$\varphi_s(z) = \frac{z}{2l} + const. \tag{4}$$

В случае медленного движения границы $l(\tau)$, «фаза» волны $\varphi(z)$ за время ее пробега через систему изменяется незначительно относительно $\varphi_s(z)$. Предполагается, что $\varphi(z)$ имеет производные любого порядка, и записывая $\varphi(\tau + l(\tau))$ в виде степенных рядов по $l(\tau)$, после их подстановки в (3) получим дифференциальное уравнение для медленно изменяющейся «фазы» $\varphi(\tau)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{l^{k+1}}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}\varphi}{d\tau^{k+1}} = 1. \tag{5}$$

Так как $\varphi(\tau)$ мало отклоняется от линейного закона $\varphi_s(z = \tau)$ за время пробега волны через резонатор, то каждый следующий член в левой части уравнения (4) много меньше предыдущего и его решение нужно искать в виде ряда

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\tau). \tag{6}$$

Подставляя (5) в (4) и приравнивая члены одинакового порядка малости по отдельности к нулю, получим для нулевого приближения

$$\frac{d\varphi_0}{d\tau}(\tau) = \frac{1}{l(\tau)}.$$

Отсюда

$$\varphi_0(\tau) = \int\limits_0^\tau \frac{1}{l(t)}\, dt.$$

Обозначим $z_+ := \tau + \xi$, $z_- := \tau - \xi$.

В случае линейного закона движения границы $l(\tau) = 1 + \nu\tau$ фаза динамических собственных колебаний равна

$$\varphi_0(z_\pm) = \frac{1}{\nu} ln(l(\tau) \pm \nu\xi).$$

При этом точное решение выглядит следующим образом [1]:

$$\varphi(z_\pm) = \left(ln\frac{1+\nu}{1-\nu} \right)^{-1} ln\frac{l(\tau \pm \nu\xi)}{1+\nu}.$$

Таким образом, асимптотический метод уже в нулевом приближении дает качественно совпадающие с точными результаты.

Список литературы

[1] В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, *Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами*, монография, Самар. гос. техн. ун-т, Самара, 2009, 131 с.

[2] А. И. Весницкий, *Волны в системах с движущимися границами и нагрузками*, Физматлит, М., 2001, 320 с.