Задачи оптимизации коэффициентами полулинейных УМФ эллиптического типа с разрывными данными и их конечномерная аппроксимация

Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова

Башкирский государственный университет

Пусть

$$\Omega = \{r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant r_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$$

– прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega = \Gamma$. Пусть область Ω разделена прямой $r_1 = \xi$, где $0 < \xi < l_1$, на подобласти

$$\Omega_1 \equiv \Omega^- = \{0 < r_1 < \xi, \quad 0 < r_2 < l_2\}, \qquad \Omega_2 \equiv \Omega^+ = \{\xi < r_1 < l_1, \quad 0 < r_2 < l_2\}$$

с границами $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$ и $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$. Через $\overline{\Gamma}_k$ будем обозначать границы областей Ω_k без S, $k = 1, 2$. Так что $\partial\Omega_k = \overline{\Gamma}_k \cup S$, где части Γ_k, $k = 1, 2$ – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$; $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$. Через n_α, $\alpha = 1, 2$ будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$ области Ω_α, $\alpha = 1, 2$. Пусть, далее, $n = n(x)$ – единичная нормаль к S в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль n является внешней нормалью к S по отношению к области Ω_1, то есть нормаль n направлена внутрь области Ω_2. Ниже, при постановке краевых задач для состояний процессов управления, S – это прямая, вдоль которой разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях Ω_1 и Ω_2 обладают некоторой гладкостью.

Пусть условия управляемого физического процесса позволяют моделировать его в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух частей (подобластей) Ω_1 и Ω_2, разбитой на части внутренней границей S, следующей задачей Дирихле для полулинейного уравнения эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решениями: требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 уравнению

$$\begin{aligned}
&Lu(x) = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + d(x)q(u) = f(x), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2,\\
&\text{и условиям} \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2,\\
&\left[k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] = 0, \quad G(x) = \left(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = \theta(x_2)[u], \quad x \in S,
\end{aligned} \tag{1}$$

где

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1;\\ u_2(x), & x \in \Omega_2, \end{cases} \quad q(\xi) = \begin{cases} q_1(\xi_1), & \xi_1 \in \mathbb{R};\\ q_2(\xi_2), & \xi_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$k_\alpha(x), d(x), f(x) = \begin{cases} k_\alpha^{(1)}(x), d_1(x), f_1(x), & x \in \Omega_1;\\ k_\alpha^{(2)}(x), d_2(x), f_2(x), & x \in \Omega_2,\ \alpha = 1, 2. \end{cases}$$

Здесь $[u] = u_2(x) - u_1(x)$ – скачок функции $u(x)$ на S; $k_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$, $f(x)$ – известные функции, определяемые по-разному в Ω_1 и Ω_2, претерпевающие разрыв первого рода на S; $q_\alpha(\xi_\alpha)$, $\xi_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1, 2$, $d_2(x)$, $x \in \Omega_2$ – заданные функции; $g(x) \equiv (\theta(x), d_1(x))$, – управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $k_\alpha(x) \in W_\infty^1(\Omega_1) \times$

$W_\infty^1(\Omega_2)$, $\alpha = 1,2$, $d_2(x) \in L_\infty(\Omega_2)$, $f(x) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$; $0 < \nu \leqslant k_\alpha(x) \leqslant \overline{\nu}$, $\alpha = 1,2$, $0 \leqslant d_0 \leqslant d_2(x) \leqslant \overline{d}_0$, $x \in \Omega_2$; $\nu, \overline{\nu}, d_0, \overline{d}_0$ – заданные константы; функции $q_\alpha(\xi_\alpha)$, определенные на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$, удовлетворяют условиям: $q_\alpha(0) = 0$, $0 < q_0 \leqslant \big(q_\alpha(\xi_\alpha) - q_\alpha(\overline{\xi}_\alpha)\big)/\big(\xi_\alpha - \overline{\xi}_\alpha\big) \leqslant L < \infty$, для всех $\xi_\alpha, \overline{\xi}_\alpha \in \mathbb{R}$, $\xi_\alpha \neq \overline{\xi}_\alpha$, $\alpha = 1,2$.

Введем множество допустимых управлений $U = \prod\limits_{\alpha=1}^{2} U_\alpha$, $U_\alpha \subset H_\alpha$, $\alpha = 1,2$, $H = H_1 \times H_2$, $H_1 = L_2(S)$, $H_2 = L_2(\Omega_1)$ – пространства управлений,

$$\begin{gathered} U_1 = \big\{g_1(x) = \theta(x) \in L_2(S):\ 0 < g_0 \leqslant g(x) \leqslant \overline{g}_0 \text{ п.в. на } S\big\}, \\ U_2 = \big\{g_2(x) = d_1(x) \in L_2(\Omega_1):\ 0 < d_0 \leqslant d_1(x) \leqslant \overline{d}_0 \text{ п.в. на } \Omega_1\big\}, \end{gathered} \tag{2}$$

где d_0, $\overline{d}_0$, g_0, $\overline{g}_0$ – заданные числа.

Зададим функционал цели $J:\ U \to \mathbb{R}^1$ в виде

$$g \to J(g) = \int\limits_{\Omega_1} \Big|u(r_1, r_2; g) - u_0^{(1)}(r)\Big|^2 d\Omega_1 = I(u(r; g)), \tag{3}$$

где $u_0^{(1)} \in W_2^1(\Omega_1)$ – заданная функция.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $g_* \in U$, которое минимизирует на множестве $U \subset H$ функционал $g \to J(g)$, точнее, на решениях $u(r) = u(r; g)$ задачи (1), отвечающих всем допустимым управлениям $g = (\theta(x), d_1(x)) \in U$, требуется минимизировать функционал (3).

В работе построены и исследованы разностные аппроксимации экстремальных задач, установлены оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию и функционалу, слабая сходимость по управлению. Проведена регуляризация аппроксимаций. При этом исследования аппроксимаций проводятся для дифференциальных уравнений, описывающих разрывные состояния процессов управления с обобщенными решениями из классов Соболева, при естественных незавышенных априорных требованиях к гладкости входных данных и управлений.

В теплофизических терминах поставленные задачи можно трактовать как задачи оптимального управления коэффициентом граничного условия сопряжения разнородных теплопроводящих сред $\theta(x)$ и коэффициентом теплоотдачи $d_1(x)$, входящим в нелинейное слагаемое $d_1(x)\, q_1(u)$, характеризующее мощность нелинейных стоков тепла, зависящих от температуры и распределенных в области Ω_1. При этом этот коэффициент граничного условия сопряжения характеризует термическое сопротивление неидеального контакта разнородных сред.

Работа второго автора выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (Конкурс – МК-2015).

Список литературы

[1] Ф. П. Васильев, *Методы оптимизации*, Факториал Пресс, М., 2002.

[2] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.

[3] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1986.

[4] Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова, “О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициетах”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **47**:3 (2007), 376–396.

[5] Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова, “Разностные аппроксимации задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений в выпуклой области с управлениями в коэффициентах при старших производных”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **53**:1 (2013), 20–46.

[6] Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова, М. Э. Файрузов, “Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями, с управлением в граничных условиях сопряжения”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **54**:11 (2014), 1767–1792.