Ортогональные системы сдвигов в поле p-адических чисел

С. Ф. Лукомский

Саратовский государственый университет

Пусть $G = Q_p^+$ аддитивная группа поля p-адических чисел, $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ – основная цепочка подгрупп, $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ – базисная последовательность, т.е. $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$. Пусть далее X группа характеров в G, $G_n^\perp$ – последовательность аннуляторов, (r_n) –последовательность функций Радемахера, т.е. $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$. Обозначим через

$$H_0 = \{h = a_{-1}g_{-1}\dot{+}a_{-2}g_{-2}\dot{+}\dots\dot{+}a_{-s}g_{-s} : s \in \mathbb{N}, a_j = \overline{1, p-1}\}$$

множество сдвигов.

Нас будут интересовать условия на функцию $\varphi \in L_2(G)$, как необходимые так и достаточные, при которых система сдвигов $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ будет ортонормированной.

Пусть $M, N \in \mathbb{N}$. Через $\mathfrak{D}_M(G_{-N})$ обозначим совокупность ступенчатых функций, постоянных на смежных классах $G_M\dot{+}g$, носитель которых лежит в G_{-N}. Аналогично определим класс $\mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$. Отметим, что $\varphi \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$ т.и.т., когда $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$ Определим систему $N+M$-мерных векторов

$$\mathbf{e}_l(\alpha) = \mathbf{e}_l(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}),$$
$$l = l_{-N} + l_{-N+1}p + \dots + l_0 p^N + \dots + l_{M-1}p^{N+M-1} = \overline{0, p^{N+M}-1}$$
$$\alpha = \alpha_{M-1} + \alpha_{M-2}p + \dots + \alpha_{-N}p^{N+M-1} = \overline{0, p^{N+M}-1}.$$

равенствами

$$\mathbf{e}_l(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}) = \frac{1}{p^{\frac{M+N}{2}}} e^{\frac{-2\pi i}{p^{M+N}} l\alpha}$$
$$= \frac{1}{p^{\frac{M+N}{2}}} e^{\frac{-2\pi i}{p^{M+N}}(l_{-N}+\dots+l_{M-1}p^{N+M-1})(\alpha_{M-1}+\alpha_{M-2}p+\dots+\alpha_{-N}p^{N+M-1})}.$$

Ясно, что векторы $(\mathbf{e}_l)_{l=0}^{p^{N+M}-1}$ образуют ортонормированную систему. Поэтому для преобразования Фурье функции $\varphi \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$ можно записать равенство

$$|\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 = \sum_{l=0}^{p^{M+N}-1} c_l \mathbf{e}_l(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}).$$

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$. Система сдвигов $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ будет ортонормированной системой тогда и только тогда, когда для коэффициентов Фурье c_l функции $|\hat{\varphi}|^2$ справедливы соотношения*

$$c_0 = p^{\frac{N-M}{2}}, c_1 = \dots = c_{p^N-1} = 0; \qquad c_{p^N(p^M-1)+j} = 0 \ (j = 1, 2, \dots, p^N-1).$$

Используя эту теорему получаем следующее утверждение

Теорема 2. *Пусть $p = 2$, $N \in \mathbb{N}$, $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{-N}(G_1^\perp)$. Если система сдвигов $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ есть ортонормированная система, то $\hat{\varphi}(G_1^\perp \setminus G_0^\perp) = 0$.*

В отличие от [1] в этой теореме отсутствует требование φ порождает КМА.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 13-01-00102а.

Список литературы

[1] S. Albeverio, S. Evdokimov, M. Skopina, “p-Adic Multiresolution Analysis and Wavelet Frames”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **16**:5 (2010), 693–714.