

О спектральных разложениях оператора Штурма–Лиувилля с двухточечными краевыми условиями

А. С. Макин

Московский государственный технический университет
радиотехники, электроники и автоматики

Рассмотрим задачу на собственные значения для заданного на интервале $(0, \pi)$ уравнения Штурма–Лиувилля

$$u'' - q(x)u + \lambda u = 0 \quad (1)$$

с общими двухточечными краевыми условиями

$$B_i(u) = a_{i1}u'(0) + a_{i2}u'(\pi) + a_{i3}u(0) + a_{i4}u(\pi) = 0, \quad (2)$$

где $B_i(u)$ ($i = 1, 2$) – линейно независимые формы с произвольными комплексными коэффициентами. Функция $q(x)$ есть произвольная комплекснозначная функция из класса $L_1(0, \pi)$.

Условия (2) подразделяются на 4 основных типа:

- 1) усиленно регулярные;
- 2) регулярные, но не усиленно регулярные;
- 3) нерегулярные;
- 4) вырожденные.

Известно, что в первом случае система корневых функций $\{u_n(x)\}$ задачи (1), (2) всегда является базисом Рисса в пространстве $L_2(0, \pi)$, в третьем случае она никогда не образует даже обычного базиса в указанном пространстве, а во втором случае в зависимости от конкретного вида краевых условий и функции $q(x)$ система $\{u_n(x)\}$ может обладать или не обладать свойством базисности в пространстве $L_2(0, \pi)$. Значительно менее исследованными являются задачи на собственные значения для уравнения (1) с вырожденными краевыми условиями.

Итак, пусть условия (2) являются вырожденными. Согласно [1], за исключением задачи Коши, где спектр отсутствует, они имеют вид

$$u'(0) + du'(\pi) = 0, \quad u(0) - du(\pi) = 0, \quad (3)$$

где $d \neq 0$. Пусть λ_n – занумерованные без учета кратности в порядке неубывания модуля собственные значения задачи (1), (3). Обозначим $m(\lambda_n)$ кратность собственного значения λ_n , $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$, $\operatorname{Re} \mu_n \geq 0$.

ТЕОРЕМА. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(\lambda_n)}{\sqrt{|\mu_n|}} = 0$, то система собственных и присоединенных функций задачи (1), (3) не образует базис в $L_2(0, \pi)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00241).

Список литературы

- [1] Lang P., Locker J., “Spectral theory of two-point differential operators determined by $-D^2$ ”, *J. Math. Anal. Appl.*, **146**:1 (1990), 148–191.