Задача Стеклова для бигармонического уравнения в неограниченных областях

О. А. Матевосян

Высшая школа науки

Научно-исследовательский университет "Московский авиационный институт"

В области Ω рассматривается задача Стеклова

$$\Delta^2 u(x) = 0,\ x \in \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = \left(\Delta u + \tau \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

ν – направление внешней нормали к $\partial\Omega$, $\tau \in C(\partial\Omega)$.

Условием, характеризующим поведение решения на бесконечности, является ограниченность интеграла Дирихле $D_a(u,\Omega) := \int\limits_{\Omega} |x|^a \sum\limits_{|\alpha|=2} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx < \infty$ с весом $|x|^a, a \in \mathbb{R}^1$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

I. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus G$ с границей $\partial\Omega \in C^2$, где G – ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^n$ $(n > 4)$, $0 \in G$.

Теорема 1. *Задача Стеклова с условием $D_a(u,\Omega) < \infty$ имеет:*

(i) $n+1$ линейно независимых решений, если $-n \leqslant a < n-4$;

(ii) n линейно независимых решений, если $n-4 \leqslant a < n-2$;

(iii) лишь тривиальное решение, если $n-2 \leqslant a < \infty$;

(iv) $k(r,n)$ линейно независимых решений при $-2r+2-n \leqslant a < -2r+4-n$, $r > 1$, где $k(r,n) = \frac{(r+n)!}{n!r!} - \frac{(r+n-4)!}{n!(r-4)!}$.

II. Пусть $\Omega \equiv \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 1\}$ с границей $\partial\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 1\}$, $n \geqslant 2$.

Теорема 2. *Задача Стеклова с условием $D_a(u,\Omega) < \infty$ имеет:*

(i) тривиальное решение, если $-n \leqslant a < \infty$;

(ii) $k(r,n)$ линейно независимых решений при $-2r+2-n \leqslant a < -2r+4-n$, $r > 1$, где $k(r,n) = \frac{(r+n)!}{n!r!} - \frac{(r+n-4)!}{n!(r-4)!} - \frac{(r+n-1)!}{(n-1)!r!} - \frac{(r+n-2)!}{(n-1)!(r-1)!}$.

Список литературы

[1] Stekloff W., "Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique", *Annales Sci. de l'E.N.S. 3^e série*, **19** (1902), 191–259; 455–490.