О весовых пространствах бесконечно дифференцируемых функций в неограниченных областях в $\mathbb{R}^p$

И. Х. Мусин

Институт математики с ВЦ Уральского научного центра РАН

Доклад посвящён проблемам теории приближения, анализа Фурье и теории операторов в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых функций в неограниченных областях многомерного вещественного пространства. В частности, будет дано усиление и развитие результатов, ранее полученных в [1]-[3].

Одно из рассматриваемых пространств – следующее. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^k$, $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ – совокупность компактных множеств $K_m \subset \mathbb{R}^k$ таких, что $K_m \subset int K_{m+1}$ и $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} K_m = \Omega$. Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ – семейство непрерывных функций $\varphi_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ таких, что для любого $m \in \mathbb{N}$:

$$1) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi_m(x)}{\|x\|} = +\infty \quad (\|\cdot\| \text{ – евклидова норма в } \mathbb{R}^n);$$

$$2) \quad \lim_{x\to\infty} (\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x)) = +\infty.$$

Обозначим через $\mathcal{E}_{\varphi}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ пространство функций $f \in C^{\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ таких, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ найдётся постоянная $c_m(f) > 0$ такая, что

$$|(D_t^{\alpha} D_x^{\beta} f)(t,x)| \leqslant c_m(f) \exp(\varphi_m(x)), \ t \in K_m, x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leqslant m, |\beta| \leqslant m.$$

Наделим $\mathcal{E}_{\varphi}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ локально выпуклой топологией, определяемой системой полунорм

$$p_m(f) = \sup_{\substack{(t,x)\in K_m \times \mathbb{R}^n, \\ |\alpha|\leqslant m, |\beta|\leqslant m}} \frac{|(D_t^{\alpha} D_x^{\beta} f)(t,x)|}{\exp(\varphi_m(x))} \ .$$

Теорема 1. *Полиномы плотны в* $\mathcal{E}_{\varphi}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$.

В предположении выпуклости Ω и при дополнительных условиях на φ будет дано описание сопряженного пространства к $\mathcal{E}_{\varphi}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ в терминах преобразования Фурье-Лапласа функционалов как некоторого пространства целых функций в $\mathbb{C}^{k+n}$. Здесь же приведем одно простое применение теоремы 1. Напомним, что линейный непрерывный оператор T на сепарабельном локально выпуклом пространстве X называют *гиперциклическим*, если существует точка $x \in X$ такая, что ее орбита $Orb\{x, T\} = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$ плотна в X.

Теорема 2. *Любой линейный непрерывный оператор на* $\mathcal{E}_{\varphi}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, *коммутирующий с операторами частного дифференцирования и не являющийся кратным тождественному оператору*, *является гиперциклическим.*

Список литературы

[1] И. Х. Мусин, “О преобразовании Фурье–Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$”, *Матем. сб.*, **195**:10 (2004), 83–108.

[2] И. Х. Мусин, С. В. Попёнов, “О весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$”, *Уфимск. матем. журн.*, **2**:3 (2010), 54–62.

[3] I. Kh. Musin, “Approximation by polynomials in a weighted space of infinitely differentiable functions with an application to hypercyclicity”, *Extracta Math.*, **27**:1 (2012), 75–90.