# О восстановлении функций из классов Ульянова «методом Смоляка»

Н. Ж. Наурызбаев, А. А. Шоманова, Н. Темиргалиев

*Институт теоретической математики и научных вычислений*
*Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева*

Аппроксимативные задачи для функций из периодических классов $F$ с доминирующими смешанными производными тесно связаны с так называемыми «гиперболическими крестами» ($\bar{m}_j = \max\{|m_j|; 1\}$)

$$\Gamma = \Gamma_R \equiv \{m = (m_1, \ldots, m_s) \in Z^s : \bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s \leqslant R\} \; (R \geqslant 1)\,, \tag{1}$$

образующих «Спектр больших коэффициентов Фурье» этих классов ($\varepsilon > 0$)

$$\Gamma_\varepsilon(F) = \{m \in Z^s : \sup_{f \in F} \left|\hat{f}(m)\right| \geqslant \varepsilon > 0\},$$

в случае (1) – классов Коробова $E_s^r$ состоящего из функций $f$ с условием $\left|\hat{f}(m)\right| \leqslant (\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^{-r}$ $(m = (m_1, \ldots, m_s) \in Z^s, r > 1)$

Эти задачи органически примыкают к основной проблеме «Геометрии чисел», где требуется построить решетку с минимальным значением определителя, пересекающуюся с заданным множеством самое большее по нулевому элементу (см. [1]).

В случае «гиперболических крестов» такие задачи тесно связаны с сетками с малыми дискрепансами с порядками убывания $\ll \frac{\ln^{\beta(s)} N}{N}$ $(\beta(s) > 0)$, которые автоматически приводят к оптимальным коэффициентам, стало быть, к точным в степенной шкале квадратурным формулам с равными весами по сетке Коробова.

Как оказалось, существуют сетки узлов с «большими» дискрепансами $\asymp \frac{1}{\ln N}$, но для которых посредством надлежащего выбора весов квадратурные формулы по ним также для классов функций с доминирующими смешанными производными можно сделать оптимальными в степенной шкале (см. [2-7]).

Такого сорта результаты берут начало в работах Смоляка [4], впоследствии известных под общим названием «Метод Смоляка», где существенные продвижения принадлежат В.Н.Темлякову [5], группе математиков, работающих в области под названием „Information Based Complexity“ и др.

К классам функций, спектр больших коэффициентов Фурье которых образуют гиперболические кресты, относятся классы Ульянова $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$ (см. [3]).

Заменой «тензорных произведений классов» из [4] на «тензорные произведения функционалов» в [6] (см. также [3]) получаем новые операторы, которые на классах Ульянова дают близкие к оптимальным порядки восстановления (частично изложено в [7]).

Так, если в шкале классов Коробова $E_s^r$ $(r > 1, s = 1, 2, \ldots)$ погрешности восстановления функций по сеткам Коробова с малым дискрепансом $\ll N^{-1} \log^{\beta(s)} N$ в степенной шкале имеют скорость убывания не быстрее $\asymp N^{-\frac{r-1}{2}}$, то по сеткам Смоляка с плохим дискрепансом $\asymp \ln^{-1} N$ имеют неулучшаемую скорость $\asymp N^{-(r-1)}$, что мы относим к необъяснимому для нас феномену [2].

Заметим, что такие же скорости в степенной шкале для всех классов с доминирующей смешанной производной типа $SW$, $SH$ и $SB$ с дальнейшими уточнениями показателей логарифмов в их числителях.

## Список литературы

RBibitem1Е. А. Баилов, М. Б. Сихов, Н. Темиргалиев, “Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:7 (2014), 1059–1077.

[1] N. Nauryzbayev, N. Temirgaliyev, “An Exact Order of Discrepancy of the Smolyak Grid and Some General Conclusions in the Theory of Numerical Integration”, *Found Comput Math.*, 2012, № 12, 139–172.

[2] Н. Темиргалиев, “Классы $U_s\,(\beta,\theta,\alpha;\psi)$ и квадратурные формулы”, *Докл. РАН*, **393**:5 (2003), 605–608.

[3] С. А. Смоляк, “Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций”, *Докл. АН СССР*, **148**:5 (2003), 1042–1045.

[4] В. Н. Темляков, “Приближенное восстановление периодических функций нескольких переменных”, *Матем. сб.*, **128**:2 (1985), 256–268.

[5] Н. Темиргалиев, “Тензорные произведения функционалов и их применения”, *Докл. РАН*, **430**:4 (2010), 460–465.

[6] Н. Темиргалиев, Н. Ж. Наурызбаев, А. А. Шоманова, “Аппроксимативные возможности вычислительных агрегатов “Типа Смоляка” с ядрами Дирихле, Фейера и Валле-Пуссена в шкале классов Ульянова”, *Известия вузов. Математика*, 2015, № 7, 75–81.