О правильном порядке поперечников «кодирования» функций из классов $H_p^\omega(0,1)$ в лебеговой метрике $L^q(0,1)$

Е. Е. Нурмолдин, Б. Б. Ахметов

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева

Поперечник «кодирования» функций и информативная мощность всех линейных функционалов, по определению, есть соответственно величины

$$\lambda^N(F) = \inf_{\substack{l_1,\dots,l_N \text{ – все} \\ \text{возможные линейные} \\ \text{функционалы}}} \sup_{\substack{f,g\in F:\, l_\tau(f)=l_\tau(g) \\ (\tau=1,\dots,N)}} \|f-g\|_Y,$$

$$\delta_N(F)_Y \equiv \inf_{\substack{l_1,\dots,l_N \text{ – все} \\ \text{возможные линейные} \\ \text{функционалы},\, \varphi_N}} \sup_{f\in F} \|f(x)-\varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f);x)\|_Y,$$

где F – класс функций на $[0,1]^s$, Y – нормированное пространство, $l_1,\dots,l_N$ – линейные функционалы над F, $\varphi_N(z_1,\dots,z_N;x): R^N\times[0,1]^s\to R^1$ – алгоритм переработки информации.

Двойственное соотношение (здесь оценка снизу $\lambda^N \gg \delta_N$ к известной оценке сверху Н. П. Корнейчука принадлежит Ю. В. Малыхину) $\lambda^N(F)_Y \asymp \delta_N(F)_Y$ по решенным (К(В)П-1-задачам) $\delta_N(F)_Y \asymp \vartheta_N$ позволяет получать неулучшаемые порядковые оценки для $\lambda^N(F)_Y$, если только $\lambda^N(F)_Y \asymp \lambda_1^N(F)_Y$, где

$$\lambda_1^N(F)_Y = \sup\left\{\|f\|_Y : f\in F,\, l_\tau(f)=0\,(\tau=1,\dots,N)\right\}.$$

Как легко проверить, равенство $\lambda^N(F)_Y = 2\lambda_1^N(F)_Y$ выполнено для класса

$$F = H_p^\omega(0,1) \equiv \{f\in L^p(0,1) : \omega_p(\delta;f)\leqslant\omega(\delta)\,(0\leqslant\delta\leqslant1)\}$$
$$(1\leqslant p\leqslant\infty,\ \ L^\infty(0,1)\equiv C(0,1)),$$

где $\omega_p(\delta;f)$ и $\omega(\delta)$ – модули непрерывности функции f из $L^p(0,1)$ и в общем определении С. М. Никольского соответственно. Поэтому, применяя результаты из [1], приходим к порядковым соотношениям для поперечника по «кодированию» функций: если $2\leqslant p<q<\infty$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac1n\right)<\infty$, то

$$\lambda^N\left(H_p^\omega\right)_{L^q} \asymp \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac1n\right)\right)^{\frac1q}$$

и если $2\leqslant p<\infty$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\frac1p-1}\omega\left(\frac1n\right)<\infty$, то

$$\lambda^N\left(H_p^\omega\right)_{L^\infty} \asymp \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{\frac1p-1}\omega\left(\frac1n\right).$$

В заключение отметим, что в случае $2 \leqslant p < q < \infty$ в $\delta_N\big(H_p^\omega(0,1)\big)_{L^q(0,1)}$ согласно соответствующему результату П. Л. Ульянова (1964 год), среди всех вычислительных агрегатов наилучше приближают частичные суммы ряда Фурье–Хаара, коэффициенты Фурье которых, без потери порядковой точности, можно вычислять с точностью $\frac{1}{N}\left(\sum_{n=N}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{q}}$, но никак не (порядково) больше (что есть решение задачи К(В)П-2).

Список литературы

[1] Ш. У. Ажгалиев, Н. Темиргалиев, "Информативная мощность всех линейных функционалов при восстановлении функций из классов H_p^ω", *Матем. сб.*, **198**:11 (2007), 3–20.