Представление решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами

Р. Перез Ортиз

Mexican Center for Economic and Social Studies (CEMEES)
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Изучаются интегро-дифференциальные уравнения с неограничеными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, представляющие собой абстрактное волновое уравнение, возмущенное вольтерровыми интегральными операторами с ядрами, зависящими от параметра. К исследованию указанных уравнений приводят многочисленые задачи, возникающие в приложениях: в теории вязкоупругости, в теории распространения тепла в средах с памятью, и в теории усреднения. В работе получены представления решений следующей задачи для интегродифференциального уравнения вида

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A^2u - \int_0^t K(t-s)A^{2\xi}u(s)\,ds = f(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \qquad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{2}$$

в виде рядов по экспонентам, отвечающим точкам спектра оператор-функции $L(\lambda)$, являющейся символом уравнения (1). Здесь A – самосопряженный положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный, а параметр $\xi \in (0,1)$. Пусть $K(t)$ допускает представление $K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \mathrm{e}^{-\gamma_j t}$, где $c_j > 0$, $\gamma_{j+1} > \gamma_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, $\gamma_j \to +\infty$ $(j \to +\infty)$ и выполнены условия

a) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} < 1$,
b) $\sum_{j=1}^{\infty} c_j < +\infty$,
c) $\sup_k\{\gamma_k(\gamma_{k+1} - \gamma_k)\} = +\infty$.

Теорема. *Пусть $f(t) = 0$ при $t \in \mathbb{R}_+$, вектор-функция $u(t) \in W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$, $\gamma >$ nobreak0, является сильным рещением задачи* (1)–(2), *и выполнены условия* a) *и* c). *Тогда для любого $t \in \mathbb{R}_+$ решение $u(t)$ задачи* (1)–(2) *представимо в виде*

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(\varphi_{1n} + \lambda_n^{\pm}\varphi_{0n})\mathrm{e}^{\lambda_n^{\pm} t}}{\ell_n'(\lambda_n^{\pm})} \right) e_n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_{n,k}\varphi_{0n})\mathrm{e}^{\lambda_{n,k} t}}{\ell_n'(\lambda_{n,k})} \right) e_n$$

сходящегося по норме пространства H, где $\varphi_{0n} = (\varphi_0, e_n)$, $\varphi_{1n} = (\varphi_1, e_n)$, $Ae_n = a_n e_n$ ($\{e_n\}$ – ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора A), а $\lambda_{n,k}$ – действителньные нули мероморфной функции $\ell_n(\lambda) = (L(\lambda)e_n, e_n)$, удовлетворяющие неравенствам,

$$\cdots - \gamma_k < \lambda_{n,k} < \cdots < -\gamma_1 < \lambda_{n,1} < 0, \qquad и \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_{n,k} = -\gamma_k \tag{3}$$

а $\lambda_n^{\pm}$ – пара комлексно-сопряженных нулей, $\lambda_n^{+} = \overline{\lambda_n^{-}}$, асимптотически предстамимых в виде:

1) *если выполнено условие* b), *то*

$$\lambda_n^{\pm}(\xi) = -\frac{1}{2}\frac{1}{a_n^{\delta_1(\xi)}}\sum_{j=1}^{\infty} c_j + O\left(\frac{1}{a_n^{\delta_2(\xi)}}\right) \pm i\left(a_n + O\left(\frac{1}{a_n^{\delta_3(\xi)}}\right)\right), \qquad a_n \to +\infty,$$

где все $\delta_k(\xi)$ *положительны* (*см.* [1], [2]).

2) *если условие* b) *не выполнено*, *то*

$$\lambda_n^{\pm}(\xi) = \frac{C_k}{a_n^{\beta_1(\xi)}} \pm i\left(a_n + \frac{C_k}{a_n^{\beta_1(\xi)}}\right) + O\left(\frac{1}{a_n^{\beta_3(\xi)}}\right), \qquad a_n \to +\infty,$$

где не все $\beta_k(\xi)$ *положительны* (*см.* [1], [2]).

Локализация спектра оператор-функции $L(\lambda)$, являющейся символом уравнения (1) приведена в работах [1], [2].

Список литературы

[1] В. В. Власов, Р. Перез Ортиз, “Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости и теплофизике”, *Матем. заметки* (в печати).

[2] R. Perez Ortiz, V. V. Vlasov, *Spectra of the Gurtin–Pipkin type equations with the kernel*, *depending on the parameter*, arXiv: 1403.4382.

[3] R. Perez Ortiz, V. V. Vlasov, *Correct solvability of hyperbolic Volterra equations with kernels depending on the parameter*, arXiv: 1412.1067.

[4] Н. А. Раутиан, “О структуре и свойствах решений интегродифференцияльных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике”, *Матем. заметки*, **90**:3 (2011), 470–473.

[5] G. Amendola, M. Fabrizio, J. M. Golden, *Thermodynamics of Materials with Memory*, *Theory and Applications*, Springer, New York, 2012.