К теории нелинейных переопределенных систем трех и четырех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией в пространстве

Р. Пиров

Таджикский государственный педагогический университет имени Садриддина Айни

В монографии [1] рассматривались системы уравнений в частных производных первого порядка. В §5 работы [2] подробно щучены квазилинейные системы второго порядка с одной неизвестной функцией. Эти исследования продолжены в работе [3]. В данном сообщении рассматриваются некоторые типы систем, указанные в заглавии. Оговоримся сразу, что в исследуемых системах правые части заданные, а U-неизвестная функции, которые ищутся в классе $C^4(\Pi)$, где Π-некоторая односвязная ограниченная область пространства R^3, содержащая внутри себя начало координат. Основной метод исследования состоит в замене производных первого и второго порядка правых частей на новые неизвестные функции, переходе к системам с большим числом неизвестных функций и в установлении связей с достаточно изученными системами в полных дифференциалах (п.д.-система) [4].

I. Системы с тремя уравнениями. Здесь исследуются системы

$$U_{xx}, U_{yy}, U_{zz} = f^i(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z,U_{xy},U_{yz},U_{zx}), \qquad i=\overline{1,3} \tag{1}$$

$$U_{xy}, U_{yz}, U_{zx} = f^j(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z,U_{xx},U_{yy},U_{zz}), \qquad j=\overline{1,3} \tag{2}$$

$$U_{xx}, U_{yy}, U_{xz} = f^k(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z,U_{xz},U_{yz},U_{zz}), \qquad k=\overline{1,3} \tag{3}$$

1. Пусть дана система (1). В силу замен $U_x = p(x,y,z), U_y = q(x,y,z), U_z = R(x,y,z), U_{xx} = p_y = Q(x,y,z), U_{yz} = q_z = \tau(x,y,z), U_{zx} = R_x = t(x,y,z)$ операции перекрестного дифференцированная $p_{xy} = p_{yx}, p_{yz} = p_{zy}, p_{zx} = p_{xz}, q_{xy} = q_{yx}, q_{yz} = q_{zy}, q_{zx} = q_{xz}, R_{xy} = R_{yx}, R_{yz} = R_{zy}, R_{zx} = R_{xz}$ и некоторыми несложными преобразованиями получим по отношению к исходной эквивалентную п.д.-систему

$$\begin{cases} U_x = p(x,y,z), U_y = q(x,y,z), U_z = R(x,y,z), \\ p_x = f^1(x,y,z;U,p,q,R,Q,t,\tau), p_y = Q(x,y,z), p_z = t(x,y,z) \\ q_x = Q(x,y,z), q_y = f^2(x,y,z;U,p,q,R,Q,t,\tau), q_z = \tau(x,y,z) \\ R_x = \tau(x,y,z), R_y = t(x,y,z), R_z = f^3(x,y,z;U,p,q,R,Q,t,\tau). \\ Q_x, Q_y, Q_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z, t_z, t_y, t_z = f^i, \quad i=\overline{4,12} \end{cases} \tag{4}$$

где правые части $f^4 - f^{12}$ явно выражаются через $f^i, i=\overline{1,3}$ и их производные с первого до третьего порядка. Уравнения (4), (6) составляют п.д. -систему относительно семи неизвестных функций U,p,q,R,Q,τ,t и девяти тождественно выполненых условиий полной интегрируемости (у.п.и). Для (4) будет девять тождественно выполненных соотношений

$$H^i(x,y,z;U,p,q,R,Q,\tau,t) = 0, \qquad i=\overline{1,9}, \tag{5}$$

где $H^i, i=\overline{1,9}$ явно выражаются через правые части (4) и их частные производные с первого до четвертого порядка.

Для исходной системы будет корректна следующая задача с начальными данными:

$$[U]_0 = c_1, [U_x] = c_2, [U_y]_0 = c_3, [U_z]_0 = c_4, [U_{xy}]_0 = c_5, [U_{yz}]_0 = c_6, [U_{zx}]_0 = c_7 \qquad (6)$$

для которой можно считать доказанной следующую теорему:

Теорема. *Пусть в системе* (1) $f^i, i = \overline{1,3}, U \in C^4, f^2 \neq 0$ *и* $\alpha < min(a, b/M), M = max|f^i|, i = \overline{1,3}$.

Если соотношения (5) *в некоторой окрестности точки* $(x_0, y_0, z_0; U_0, U_x^0, U_y^0, U_z^0, U_{xx}^0, U_{yz}^0, U_{zx}^0,)$ *выполняются тождественно, то задача* (1),(6) *разрешима единственным образом.*

Иными словами многообразие решений содержит семь произвольных постоянных. Если хотя бы одно из условий $H^i = 0, i = \overline{1,9}$ не выполняется тождественно, а разрешено в виде $t = \varphi(x, y, z; U, p, q, R, Q, \tau), \varphi \in C^1$, то приходим к п.д. системе относительно шести неизвестных функций и шести явных условиях совместности.

2. Теперь рассмотрим систему (2). Здесь осуществленные замены $U_x = p, U_y = q, U_z = R, q_x = Q, R_z =, p_z = t$ с учетом тождественного выполнения равенств $p_y = q_x, q_z = R_y, p_z = R_x$ приводят к квазилинейной системе

$$\begin{cases} U_x = p(x,y,z), U_y = q(x,y,z), U_z = R(x,y,z), \\ p_x, p_y = f^k(x,y,z;U,p,q,R,Q,\tau,t), k = 1,2, p_z = t(x,y,z), \\ q_x, q_y = f^k(x,y,z;U,p,q,R,Q,\tau,t), k = 1,2, q_z = Q(x,y,z), \\ R_x = t(x,y,z), R_y = f^3(x,y,z;U,p,q,R,\tau,t), R_z = \tau(x,y,z). \end{cases} \qquad (7)$$

Имея систему (7) приходим к ситуации, сходной с той, что наблюдалась в пункте 1, т.е. для нее можем утверждать, что многообразие решений содержит соответственно семь или шесть произвольных постоянных.

3. В отличие от систем (1) и (2) в левых частях системы (3) нет частных производных по z (U_{xx}, U_{yy}, U_{xy}). Осуществляя замены $U_x = p, U_y = q, U_z = R, U_{yz} = q_z = Q, U_{xz} = p_z = , U_{zz} = R_z = t$ придем к системе

$$\begin{cases} U_x = p, U_y = q, U_z = R, p_x = f^1, p_y = f^3, p_z = \tau \\ q_x = f^3, q_y = f^2, q_z = Q, R_x = \tau, R_y = Q, R_z = t. \end{cases}$$

Повторяя процедуру аналогичную пунктам 1 и 2, получим еще девять неразрешенных относительно $\tau_x, \tau_y, \tau_z, Q_x, Q_y, Q_z, t_x, t_y, t_z$ уравнений. Разрешая их, опять-таки приходим к п.д.- системе относительно семи неизвестных функций, для которой имеет место аналогичная как п. 1 и 2 теорема с девятью явными условиями совместности, совершенно отличающимися от (5).

II. Системы с четырьмя уравнениями. Рассматриваются системы вида

$$U_{xx}, U_{xy}, U_{xz}, U_{yz} = f^i(x, y, z, U, U_x, U_y, U_z, U_{yy}), \qquad i = \overline{1,4}$$

и

$$U_{xx}, U_{xy}, U_{zz}, U_{yz} = f^k(x, y, z, U, U_x, U_y, U_z, U_{yy}, U_{zz}), \qquad k = \overline{1,4}$$

Следуя схеме исследования первой части работы выяснено, что многообразия решения этих систем соответственно содержать пять и шесть произвольных постоянных.

Список литературы

[1] E. Goursat, *Lecons sur l'inteqration des equations aux derivees partielles du premier ordre*, Paris, 1921, 454 pp.

[2] Л. Г. Михайлов, *Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями*, Душанбе, 1986, 116 с.

[3] Р. Пиров, "Исследование некоторых нелинейных систем уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией на плоскости", Крайові задачі для диференціальних рівнянь, **14**, выдавництво "Прут", Чернівці, 2006, 313–320.

[4] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970, 719 с.