Оценки оператора сумм Римана для классов функций определяемых k-ми модулями непрерывности на «массивных» множествах

И. Е. Преображенский

Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова

Пусть I— отрезок [0,1] с обычной мерой Лебега и X симметричное пространство функций на I. Пусть $I = [0;1]$, $f : I \to R$ периодическая функция с периодом 1. Рассмотрим оператор сумм Римана $R_n f(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k}{n}), x \in I$.

Через $\psi(X,t) = \|\chi(D)|X\|$, где $t = \mu(D)$ обозначим фундаментальную функцию X. Для каждой $f : I \to R$ определим k-модуль непрерывности $\omega_k(f, \delta; X) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \left\|\Delta_h^k(f,\cdot)|X\right\|$, где $\Delta_h^k(f;t) = \sum_{i=0}^k(-1)^{k-i}C_k^i f(t+ih)$. Через U обозначим множество квазивогнутых функций $\varphi : I \to R_+$, т.е. функций, которые не убывают и для которых $t^{-1}\varphi(t)$ не возрастает и $\lim_{t\to 0}\varphi(t) = 0$. Через $U(k)$, $k = 2,3,\ldots$ обозначим множество функций $\varphi : [0,1] \to R_+$, состоящее из функций, которые не убывают, но для которых отношение $\varphi(t)/t^k$ не возрастает. Пусть $\varphi \in U(k)$. Через $H_X^{\varphi,k}$ обозначим пространство функций, норма в котором задаётся равенством $\left\|f|H_X^{\varphi,k}\right\| = \|f|X\| + \sup\limits_{h>0,h\in I} \frac{\omega_k(f,h;X)}{\varphi(h)}$.

Теорема 1. Зафиксируем натуральное число k и функцию φ типа k-го модуля непрерывности. Пусть $f \in H_X^{\varphi,k}$. Пусть ψ — фундаментальная функция пространства X. Зафиксируем $m \in N$ и $\epsilon > 0$ такое, что m взаимнопросто с числами $2, 3, \ldots, k$. Выберем последовательности $\delta_i \downarrow 0$ и $\epsilon_i \downarrow 0$ так, чтобы выполнялись условия $\sum \epsilon_i < \epsilon$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_k(f,\delta_i;X)}{\psi(X;\epsilon_i)} < \infty$ и построим функцию

$$\Omega_\epsilon(f,h,X) = \inf_q \left\{ h^k \sum_{i=1}^{q} \frac{\omega_k(f,\delta_{i+1},X)}{\delta_{i+1}^k \psi(X,\epsilon_i)} + \sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{\omega_k(f,\delta_i,X)}{\psi(X,\epsilon_i)} \right\}.$$

Тогда если ψ— строго возрастающая функция, то для любых $n \in N$ и $\epsilon > 0$ существует множество W, $\mu(W) < \epsilon$ такое, что для каждого $x \in I \setminus W$ выполняется

$$|R_n f(x) - R_{nm} f(x)| \leqslant c\Omega_\epsilon(f, \frac{1}{n}, X),$$

где константа c не зависит от f, n, m, ϵ, x.

Доказательство теоремы в существенном базируется на конструкциях из [1].

Список литературы

[1] Е. И. Бережной, “Оценки равномерного модуля непрерывности функций из симметричных пространств”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:2 (1996), 3–20.