Квазифейнмановские формулы для группы Шрёдингера: что это, как их получать, какая от них польза

И. Д. Ремизов

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского

Формула Фейнмана – это равенство следующего вида: слева стоит определяемая равенством функция, а справа – предел кратного интеграла при стремящейся к бесконечности кратности (и только он). Предложенный О. Г. Смоляновым подход, основанный на теореме Чернова, позволил в виде формул Фейнмана получить решения для некоторых важных эволюционных уравнений: теплопроводности, Шрёдингера и других, см. обзоры [1], [2]. В настоящем докладе предлагается расширить поле внимания с фейнмановских формул до квазифейнмановских.

Определение. Квазифейнмановская формула – это равенство следующего вида: слева стоит определяемая равенством функция, а справа – выражение, содержащее кратные интегралы сколь угодно большой кратности. В отличие от фейнмановских, квазифейнмановские формулы в правой части могут содержать суммирование или другие операции.

Естественность такого расширения диктуется недавно полученной теоремой 2, дающей представление решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера не в виде фейнмановских, а в виде квазифейнмановских формул. Причем доказательство двух классов квазифейнмановских формул, даваемых новым методом, оказывается на два порядка проще, чем фейнмановских. Продвижение было достигнуто на основе структурирования условий теоремы Чернова следующим образом:

Теорема 1 (П. Р. Чернов, 1968). *Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство и $L_b(\mathcal{F},\mathcal{F})$ — пространство всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{F}$, наделенное обычной операторной нормой. Пусть дан линейный оператор $L\colon \mathcal{F} \supset Dom(L) \to \mathcal{F}$ и такая функция G, что*:

(E) *Существует сильно непрерывная полугруппа $(e^{tL})_{t\geqslant 0}$ с генератором $(L, Dom(L))$.*

(CT1) *Функция G определена на $[0,+\infty)$, принимает значения в $L_b(\mathcal{F},\mathcal{F})$, и отображение $t \longmapsto G(t)f$ непрерывно на каждом векторе $f \in \mathcal{F}$.*

(CT2) $G(0) = I$.

(CT3) *Существует такое плотное в $\mathcal{F}$ подпространство $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, что при всех $f \in \mathcal{D}$ существует $G'(0)f = \lim_{t\to 0}(G(t)f - f)/t$.*

(CT4) *Замыкание оператора $(G'(0), \mathcal{D})$ существует и равно $(L, Dom(L))$.*

(N) *Существует такое число $\omega \in \mathbb{R}$, что $\|G(t)\| \leqslant e^{\omega t}$ при всех $t \geqslant 0$.*

Тогда для каждого $f \in \mathcal{F}$ справедливо $(G(t/n))^n f \to e^{tL} f$ при $n \to \infty$, где предел равномерен по $t \in [0, t_0]$ при каждом фиксированном $t_0 > 0$.

Замечание 1. Если функция G (или, как иногда коворят, семейство $(G(t))_{t\geqslant 0}$) удовлетворяет условиям (CT1)–(CT4), то ее предлагается называть касающейся по Чернову (Chernoff-tangent) оператора L. Если же функция удовлетворяет всем условиям теоремы Чернова, то она называется (или оказывается, в зависимости от определения эквивалентности по Чернову, ср. [2] и [4]) эквивалентной по Чернову полугруппе $(e^{tL})_{t\geqslant 0}$, что означает сходимость $(G(t/n))^n f \to e^{tL} f$. В случае, когда при каждом t оператор $G(t)$ интегральный, равенство $e^{tL}f = \lim_{n\to\infty}(G(t/n))^n f$ и есть формула Фейнмана.

Основной анонсируемый в докладе результат кратко выражается так: если семейство $(S(t))_{t\geqslant 0}$ состоит из самосопряженных операторов и находится в черновском касании с самосопряженным оператором H, то семейство $R(t) = e^{i(S(t)-I)}$ эквивалентно по Чернову полугруппе Шрёдингера $(e^{itH})_{t\geqslant 0}$. В несколько большей общности это выглядит так.

Теорема 2 (И. Д. Ремизов, 2014). *Пусть даны линейный самосопряженный оператор* $H\colon \mathcal{F} \supset Dom(H) \to \mathcal{F}$ *в гильбертовом пространстве* $\mathcal{F}$ *и ненулевое число* $a \in \mathbb{R}$. *Пусть функция* S *черновски касается оператора* H *и* $(S(t))^* = S(t)$ *для каждого* $t \geqslant 0$. *Положим* $R(t) = e^{ia(S(|t|)-I)\mathrm{sign}(t)}$, *определяя экспоненту суммой ряда (это возможно, поскольку при каждом* $t \in \mathbb{R}$ *в показателе экспоненты стоят линейные ограниченные операторы в* $\mathcal{F}$*).*

Тогда функция R *эквивалентна по Чернову группе* $(e^{iatH})_{t\in\mathbb{R}}$ *и для каждых* $t \in \mathbb{R}$ *и* $f \in \mathcal{F}$ *по норме в* $\mathcal{F}$

$$e^{iatH}f = \left(\lim_{n\to\infty}\left(e^{ia(S(|t/n|)-I)\mathrm{sign}(t)}\right)^n\right)f,\ e^{iatH}f = \left(\lim_{n\to\infty} e^{ian(S(|t/n|)-I)\mathrm{sign}(t)}\right)f, \tag{1}$$

$$e^{iatH}f = \left(\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{m=0}^{k}\frac{i^m a^m n^m(\mathrm{sign}(t))^m}{m!}(S(|t/n|)-I)^m\right)f, \tag{2}$$

$$e^{iatH}f = \left(\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{m=0}^{k}\sum_{q=0}^{m}\frac{(-1)^{m-q}i^m a^m n^m(\mathrm{sign}(t))^m}{q!(m-q)!}(S(|t/n|))^q\right)f, \tag{3}$$

$$e^{iatH}f = \left(\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\left[\left(1-\frac{ian\,\mathrm{sign}(t)}{k}\right)I + \frac{ian\,\mathrm{sign}(t)}{k}S(|t/n|)\right]^k\right)f, \tag{4}$$

$$e^{iatH}f = \left(\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{q=0}^{k}\frac{k!(k-ian\,\mathrm{sign}(t))^{k-q}(ian\,\mathrm{sign}(t))^q}{q!(k-q)!k^k}(S(|t/n|))^q\right)f, \tag{5}$$

$$e^{iatH}f = \left(\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{m=0}^{k}\sum_{q=0}^{k-m}\frac{(-1)^{k-m-q}k!\,(ian\,\mathrm{sign}(t))^{k-q}}{m!q!(k-m-q)!k^{k-q}}(S(|t/n|))^m\right)f. \tag{6}$$

Символ $|x|$ *выше означает модуль действительного числа* x.

Замечание 2. Если оператор $S(t)$ интегральный, то $(S(|t/n|))^m f$ — это m-кратный интеграл от функции f, а представленные выше равенства — это квазифейнмановские формулы. Здесь кратко отметим только три полезных свойства теоремы 2. Во-первых, она позволяет свести решение задачи Коши для уравнения Шрёдингера к построению семейства, касающегося оператора из уравнения теплопроводности (это проще, чем в случае оператора Шрёдингера). Во-вторых, более не требуется контролировать рост нормы аппроксимирующего семейства. В-третьих, метод работает на уровне полугрупп, а, значит, применим к уравнениям с любым пространством координат. Доказательство теоремы 2, замечания к ней и формулировки связанных с ней открытых вопросов см. в статье [3].

Настоящее исследование профинансировано грантом РФФИ 14-41-00044 в ННГУ им. Н.И.Лобачевского.

Список литературы

[1] O. G. Smolyanov, “Feynman formulae for evolutionary equations”, Trends in Stochastic Analysis, *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, **353** (2009).

[2] Я. А. Бутко, “Формулы Фейнмана для эволюционных полугрупп”, *Наука и образование*, 2014, № 3.

[3] I. D. Remizov, *Non-Feynman approximation formulas for the Schrodinger group*, arXiv: 1409.8345.

[4] Yu. N. Orlov, V. Zh. Sakbaev, O. G. Smolyanov, “Feynman formulas as a method of averaging random Hamiltonians”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **285** (2014), 222–232.