Критерий Никольского–Зингера и наилучшая сходимость рядов по системам $\varphi(nx)$

А. И. Рубинштейн

Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”

С помощью критерия наилучшего приближения в L_p (С. М. Никольский — $p = 1$, И. Зингер — $p > 1$) установлены следующие факты.

Утверждение 1. *Если*
а) $\varphi(x) = T_{m_0,1}(x)\sin m_0x$, *где* $T_{m_0,1}(x) = \sum\limits_{m=0}^{m_0-1} a_m \cos mx > 0$, *а* $n_1 = 1$, $2 < n_{k+1} : n_k = q_k \in \mathbb{N}$, *то при* $\{A_k\} \in l_1$ *ряд*

$$\sum_{k\geqslant 1} A_k\,\varphi(n_k x) \tag{$*$}$$

наилучше сходится во всех $L_p(0,\,2\pi)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$;
б) $\varphi(x) = T_{m_0,2}(x)\cos(2p_0+1)x$, *где* $T_{m_0,2}(x) = \sum\limits_{0\leqslant 2m<m_0} a_m \cos 2mx > 0$, *а* $n_1 = 1$, $n_{k+1} : n_k = 2p_k + 1 \in \mathbb{N}$, *то при* $\{A_k\} \in l_1$ *ряд* (*) *наилучше сходится во всех* $L_p(0,\,2\pi)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Утверждение 2. *Ряд*

$$\sum_{k\geqslant 1} A_k\,\varphi(r^{k-1}x), \quad \{A_k\} \in l_1,$$

где

$$\varphi(x) = \sum_{t\geqslant 1} a_t \cos\left(s^{t-1}x\right), \quad \{a_t\} \in l_1,$$

при любых взаимно простых r, s *больших единицы наилучше сходится во всех* $L_{2m}(0,\,2\pi)$, $m \in \mathbb{N}$, *и в* $L_\infty = C$.

Похожие утверждения имеют место и при $\varphi(x)$, являющихся многочленами и рядами Уолша-Пэли, а также для некоторых φ, определенных на конечном множестве.