О равномерной базисности Рисса системы корневых функций системы Дирака с негладким потенциалом

И. В. Садовничая

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Мы изучаем оператор Дирака L_P, порожденный в пространстве $H = L_2[0,\pi] \oplus L_2[0,\pi] \ni \mathbf{y}$ дифференциальным выражением

$$\ell_P(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + P\mathbf{y}, \quad \text{где}$$

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Функции p_j, $j = 1, 2, 3, 4$, предполагаются суммируемыми на отрезке $[0,\pi]$ и комплекснозначными. Краевые условия имеют вид

$$U(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix}.$$

Оператор $L_{P,U}$, порожденный дифференциальным выражением ℓ_P и такими краевыми условиями является регулярным по Биркгофу, если определители J_{14} и J_{23} отличны от нуля (здесь $J_{k,n}$ — определитель матрицы, составленный из k-го и n-го столбцов матрицы $\mathcal{U}$. Условия являются сильно регулярными, если дополнительно выполнено равенство $(J_{12} + J_{34})^2 + 4J_{14}J_{23} \neq 0$.

Теорема. *В общем случае суммируемого потенциала для любого сильно регулярного оператора $L_{P,U}$ система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ собственных (с нормировкой $\|\mathbf{y}_n\|_H = 1$) и присоединенных функций (определенных в виде канонических цепочек по Келдышу) образует базис Рисса в пространстве H. При этом, в случае, когда потенциал P лежит в пространстве Бесова $B^\theta_{1,\infty}[0,\pi]$ для некоторого $\theta > 0$ имеет место равномерная по шару $\|P\|_{B^\theta_{1,\infty}} \leqslant R$ базисность системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. А именно, найдется такой номер $N = N(\theta, R, U)$, что оператор $T : \mathbf{e}_n \mapsto \mathbf{y}_n$, определенный на подпространстве $Lin\{\mathbf{e}_n\}_{|n|>N}$, где $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — произвольный ортонормированный базис в H, допускает оценку*

$$\|T\|\|T^{-1}\| \leqslant M = M(\theta, R, U).$$

Мы также обсудим вопрос о равномерной базисности для случая, когда $P \in L_\nu[0,\pi]$ для некоторого $\nu > 1$ и $\|P\|_{L_\nu} \leqslant R$.