Аппроксимации краевых задач, решения которых допускают явление взрыва

В. Ж. Сакбаев

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения как уравнение

$$\mathbf{A}u = f, \quad (1)$$

$$f \in X, \quad u \in Y, \quad \mathbf{A} \in B(Y, X)$$

где X, Y – банаховы пространства, а $B(Y, X)$ – некоторое топологическое пространство операторов, действующих из области определения $D(\mathbf{A}) \subset Y$ в пространство X, наделенное топологией τ_B. Задача Коши (1) определяет многозначное отображение $G: \ X \times B(Y, X) \to 2^Y$, заданное на множестве $X \times B(Y, X)$ и принимающее значение во множестве 2^Y всех подмножеств пространства Y, определяемое формулой $G(f, \mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}(f)$.

Пусть τ_H – топология на множестве 2^Y, порожденная псевдометрикой Хаусдорфа r_H, заданной на множестве 2^Y равенствами $r_H(A, B) = \max\{\sup\limits_{x \in A} \rho_Y(x, B), \sup\limits_{x \in B} \rho_Y(x, A)\}$ если $A, B \neq \varnothing$; $r_H(A, \varnothing) = r_H(\varnothing, A) = +\infty$, если $A \neq \varnothing$; $r_H(\varnothing, \varnothing) = 0$.

Будем говорить, что задача Коши (1) *проявляет свойство взрыва, если точка* $(f, \mathbf{A})$ *является точкой разрыва отображения* G. *Будем говорить, что задача Коши* (1) *проявляет свойство взрыва вдоль топологического пространства краевых задач Коши* $S \subset X \times B(Y, X)$ *если точка* $(f, \mathbf{A})$ *является точкой разрыва отображения* $G|_S : \ S \to 2^Y$.

Приведены примеры краевых задач, (не) допускающих явление взвыва, показывающие, что явления bluw up, неединственности решения или их сочетания являются примерами явления взрыва в смысле определения (1). Наделение пространства задач борелевской мерой позволяет расширить определение решения исходной задачи до случайной величины со значениями в пространстве решений исходной задачи.

Случайной полугруппой будем называть измеримое отображение ξ *некоторого пространства с мерой в линейное топологическое пространство* $C_s(R_+, B(Y))$ *сильно непрерывных отображений полуоси* R_+, *значениями которого являются однопараметрические полугруппы. Математическим ожиданием случайной полугруппы* ξ *назовем операторнозначную функцию* $R_+ \to B(Y)$, *определяемую интегралом Петтиса*:

$$\mathbf{F}_\mu(t) = \mathbf{M}[\xi](t) = \int\limits_E \xi_\epsilon(t) d\mu, \ t \geqslant 0.$$

Математическое ожидание случайной полугруппы может не быть полугруппой, тем не менее

Теорема 1. *Пусть операторнозначная функция* $\mathbf{F} : [0, +\infty) \to B(X)$ *непрерывна в сильной операторной топологии, удовлетворяет условиям* $\mathbf{F}(0) = \mathbf{I}$ *и* $\|\mathbf{F}(t)\|_{B(X)} \leqslant e^{at}$, $t \in (0, \delta)$ *при некоторых* $a \in R$ *и* $\delta > 0$. *Тогда если последовательность* $\mathbf{G}_n$ *операторнозначных функций* $\mathbf{G}_n(t) = (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n$, $n \in \mathbf{N}$, $t \in [0, +\infty)$, *сходится в сильной операторной топологии равномерно на каждом отрезке* $[0, T]$, $T > 0$, *то предельная операторнозначная функция является сильно непрерывной однопараметрической полугруппой операторов в пространстве* X *типа* $\omega \leqslant a$.

Теорема 2. *Пусть* $\{\mathbf{L}_\epsilon,\, \epsilon \in E\}$ *– операторнозначная функция на множестве* E, *на* σ*-алгебре подмножеств* 2^E *которого задана вероятностная мера* μ, *значениями которой являются генераторы сильно непрерывных сжимающих полугрупп в банаховом пространстве* X. *Пусть существует подпространство* $D \subset X$, *являющееся существенной областью определения операторов* $\mathbf{L}_\epsilon$, $\epsilon \in E$, *такое, что для любого* $x \in D$ *интеграл* $\int\limits_E \|\mathbf{L}_\epsilon x\| d\mu$ *сходится. Тогда если определенный на пространстве* D *равенством* $\mathbf{S}x = \int\limits_E \mathbf{L}_\epsilon x d\mu$ *оператор* $\mathbf{S}$ *замыкаем и его замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы, то* $(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n \to e^{t\mathbf{S}}$, $t \in R_+$ *равномерно на любом отрезке, где* $\mathbf{F}(t) = \int\limits_E e^{t\mathbf{L}_\epsilon} d\mu$, $t \geqslant 0$.

Список литературы

[1] Ю. Н. Орлов, В. Ж. Сакбаев, О. Г. Смолянов, “Формулы Фейнмана как метод усреднения случайных гамильтонианов”, *Труды МИАН*, **285** (2014), 232–243.