Теорема Харди-Литтлвуда для рядов Фурье–Прайса в пространствах Лоренца

Е. С. Смаилов

РГКП "Институт прикладной математики" КН МОН Республики Казахстан

В теории функций большую роль сыграла теорема Харди-Литтлвуда в пространстве Лебега $L_p[0, 2\pi)$, $1 < p < +\infty$ о тригонометрических рядах с монотонными коэффициентами [1]. С помощью этой теоремы доказывалась неулучшаемость различных утверждений гармонического анализа.

В настоящей работе речь идет о тереме типа теоремы Харди-Литтлвуда в пространстве Лоренца $L_{p\theta}[0,1]$, $1 < p < +\infty$, $1 < \theta < +\infty$ относительно рядов Фурье-Прайса с обобщенно-монотонными коэффициентами.

Понятие обобщенно-монотонных последовательностей было введено в [2]. В этой работе показано, что GM содержит в себе монотонные и квазимонотонные последовательности и классы последовательностей RBVS.

Пусть $L_{p\theta}[0,1]$, $1 < p < +\infty$, $1 < \theta < +\infty$ – пространство Лоренца [3], а $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$ –мультипликативная система Прайса. $\|f\|_{p\theta}$ означает норму элементов пространства $L_{p\theta}[0,1]$.

Основным результатом является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $\overline{a} = \{a_\nu\}_{\nu=0}^{+\infty}$ – положительная, стремящаяся к нулю обобщенно-монотонная последовательность. Для того чтобы последовательность $\overline{a}$ была последовательностью коэффициентов Фурье-Прайса некоторой функции $f \in L_{p\theta}[0,1]$, $1 < p < +\infty$, $1 < \theta < +\infty$ необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu^{\theta(1-1/p)-1} a_\nu^\theta < +\infty.$$

При этом имеет место соотношение

$$\left\{ a_0^\theta + \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu^{\theta(1-1/p)-1} a_\nu^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}} \asymp \|f\|_{p\theta}.$$

Далее показывается применение данной теоремы в теории приближений и теории вложений.

Список литературы

[1] A. Zygmund, *Trigonometric series*, 3ed edition. V. I, II., Cambridge Univ. Press, 2002.

[2] C. Tikhonov, "Trigonometric series with general monotone coefficients", *Mathematical analysis and applications*, 2007, № 326, 721–735.

[3] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.

[4] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша*, Наука, М., 1987.