M-членные тригонометрические приближения анизотропных классов Никольского–Бесова периодических функций многих переменных

С. А. Стасюк

Институт математики НАН Украины

В докладе представляются результаты о наилучших M-членных тригонометрических приближениях, а также о наилучших M-членных ортогональных тригонометрических приближениях и M-членных гриди-приближениях анизотропных классов $B^{\mathbf{R}}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных.

Пусть L_q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, — пространство Лебега 2π-периодических по каждой переменной функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$ со стандартной нормой $||\cdot||_q$. $B^{\mathbf{R}}_{p,\theta}$, $\mathbf{R} = (R_1, \ldots, R_d) > \mathbf{0}$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, — анизотропные классы Никольского–Бесова (определение см., например, в [1]) периодических функций многих переменных, $g(\mathbf{R}) = (\sum_{n=1}^{d} 1/R_n)^{-1}$.

Величина $\sigma_M(B^{\mathbf{R}}_{p,\theta})_q$ наилучшего M-членного тригонометрического приближения классов $B^{\mathbf{R}}_{p,\theta}$ в метрике L_q определяется следующим образом

$$\sigma_M(B^{\mathbf{R}}_{p,\theta})_q = \sup_{f \in B^{\mathbf{R}}_{p,\theta}} \inf_{\Theta_M} \inf_{P(\Theta_M;\cdot)} ||f(\cdot) - P(\Theta_M;\cdot)||_q,$$

где $P(\Theta_M; \mathbf{x}) = \sum\limits_{j=1}^{M} c_{\mathbf{k^j}} e^{i(\mathbf{k^j}, \mathbf{x})}$, $\Theta_M = \{\mathbf{k^j}\}_{j=1}^{M}$ — система векторов $\mathbf{k^j} = (k_1^j, \ldots, k_d^j)$ с целочисленными координатами, $c_{\mathbf{k^j}}$ — произвольные коэффициенты.

Сформулируем некоторые из полученных результатов.

Теорема. *Пусть* $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $1 \leqslant p < q < \infty$, $q > 2$.
Если $g(\mathbf{R}) > \max\{\frac{1}{p}; \frac{1}{2}\}$, *то*

$$\sigma_M(B^{\mathbf{R}}_{p,\theta})_q \asymp M^{-g(\mathbf{R}) + (\frac{1}{p} - \frac{1}{2})_+},$$

где $a_+ = \max\{a; 0\}$.
Если $p \leqslant 2$, $g(\mathbf{R}) = \frac{1}{p}$, *то*

$$\sigma_M(B^{\mathbf{R}}_{p,\theta})_q \asymp M^{-\frac{1}{2}} (\log_2 M)^{1 - \frac{1}{\theta}}.$$

Если $p \leqslant 2$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < g(\mathbf{R}) < \frac{1}{p}$, *то*

$$\sigma_M(B^{\mathbf{R}}_{p,\theta})_q \asymp M^{-\frac{q}{2}(g(\mathbf{R}) - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}.$$

Список литературы

[1] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1977.