О весовых пространствах Соболева на полуоси

В. Д. Степанов[a], Е. П. Ушакова[b]

[a] *Российский университет дружбы народов*

[b] *Вычислительный центр Дальневосточного отделения РАН*

Пусть $1 < p < \infty$ и $\|f\|_p := \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$. Обозначим через $\mathring{AC}$ множество всех абсолютно непрерывных функций с компактными носителями в $(0,\infty)$ и определим весовое пространство Соболева $\mathring{W}_p^1 \equiv \mathring{W}_p^1(v_0, v_1)$ как замыкание $\mathring{AC}$ по норме

$$\|f\|_{\mathring{W}_p^1} := \|fv_0\|_p + \|f'v_1\|_p,$$

где v_0 и v_1 — измеримые на $(0,\infty)$ весовые функции такие, что $0 < v_0(x), v_1(x) < \infty$ для п.в. $x \in (0,\infty)$ и $v_0, v_1 \in L^p_{\mathrm{loc}}$, $1/v_1 \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}$, где $p' := \frac{p}{p-1}$. Для простоты полагаем, что $\mathring{W}_p^1 = W_p^1$. Тогда существуют функции $a(x)$ и $b(x)$ такие, что $a(x) < x < b(x)$ и для всех $x \in (0,\infty)$

$$\int_{a(x)}^{x} v_1^{-p'} = \int_x^{b(x)} v_1^{-p'} \qquad \text{и} \qquad V_1(x)^{1/p'}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} v_0^p\right)^{1/p} = 1, \tag{$*$}$$

где $V_1(x) := \int_{a(x)}^{b(x)} v_1^{-p'}$. В работе рассматривается пространство $(\mathring{W}_p^1)'$, ассоциативное к $\mathring{W}_p^1$, т.е. состоящее из локально интегрируемых на $(0,\infty)$ функций g, удовлетворяющих условию

$$J(g) := \sup_{0 \neq f \in \mathring{W}_p^1} \frac{\left|\int_0^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|}{\|f\|_{\mathring{W}_p^1}} < \infty.$$

Теорема. *Пусть $1 < p < \infty$, $g \in L_{\mathrm{loc}}(0,\infty)$ и v_0, v_1 удовлетворяют условию $(*)$. Тогда $J(g) \approx \mathbb{G}(g) + \mathcal{G}(g)$, где*

$$\mathbb{G}(g) := \left(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t)\left|\int_t^{a^{-1}(t)} \frac{g(x)}{V_1(x)} \int_{a(x)}^t v_1^{-p'}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right|^{p'} \mathrm{d}t\right)^{1/p'},$$

$$\mathcal{G}(g) := \left(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t)\, V_1^{p'}(t)\left|\int_t^{a^{-1}(t)} \frac{g(x)}{V_1(x)}\,\mathrm{d}x\right|^{p'} \mathrm{d}t\right)^{1/p'}.$$

Здесь a^{-1} и b^{-1} обозначают функции, обратные к a и b.

Утверждение теоремы существенно усиливает соответствующие результаты работ [1, 2].

Список литературы

[1] R. Oinarov, “Boundedness of integral operators from weighted Sobolev space to weighted Lebesgue space”, *Complex Var. Elliptic Eq.*, **56** (2011), 1021–1038.

[2] S. P. Eveson, V. D. Stepanov, E. P. Ushakova, “A duality principle in weighted Sobolev spaces on the real line”, *Math. Nachr.*, 2015.