Когда и как правильно в вычислительной практике использовать интерполяционные многочлены Лагранжа?

Г. Е. Таугынбаева

Институт теоретической математики и научных вычислений
Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева

Жозеф Луи Лагранжом в 1795 году была решена задача построения алгебраического многочлена наименьшей степени, проходящего через заданные точки. Аппроксимативные возможности многочленов Лагранжа хорошо изучены Г. Фабером, С. Н. Бернштейном, Ю. Марцинкевичем, А. Зигмундом, Г. М. Фихтенгольцем, И. П. Натансоном, К. И. Бабенко, О. В. Локуциевским и др. с более близкими к отрицательным выводами.

Нами проведено полное К(В)П (Компьютерный (вычислительный) поперечник – в трех частях) - исследование сформулированной выше в названии тезиса задачи в случае, когда гладкость задается в шкале классов Соболева $W_p^r(0,1)$, а погрешность восстановления функций измеряется в лебеговой метрике $L^q(0,1)$, при всех $1 \leqslant p,q \leqslant \infty,\ rp>1$.

В рамках К(В)П-1 установлено следующее. При $2 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ и $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, интерполяционные многочлены Лагранжа дают наилучшее (в $L^q(0,1)$) среди всех мыслимых вычислительных агрегатов (в порядковом отношении) восстановление, более того – интерполяцию, функций с ограниченной (в $L^p(0,1)$) r-й производной на отрезке $[0,1]$, с неулучшаемой скоростью $<< N^{-r+\max\left\{0;\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right\}}$, если только их использовать в сплайн-форме

$$L_{N,r}^{(i)}(x;f)=\sum_{\tau=0}^{r-1} f\left(\frac{i(r-1)+\tau}{N}\right)\prod_{t=0,t\neq\tau}^{r-1}\frac{N}{\tau-t}\left(x-\frac{i(r-1)+t}{N}\right)$$

$$\left(\frac{i(r-1)}{N}\leqslant x\leqslant\frac{(i+1)(r-1)}{N}, i=0,1,...,k-1\right)$$

с $N=(r-1)k$ $(k=1,2,....)$. В остальных же случаях $1 \leqslant p < q \leqslant 2$ и $1 \leqslant p < 2 \leqslant q \leqslant \infty$ потери в скорости восстановления, по крайней мере, *в сравнении с поперечником “кодирования” функций и с линейным поперечником В.М.Тихомирова*, составляют степенные порядки $N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$и $N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$соответственно (в первом случае линейный поперечник имеет те же потери, что и лагранжев интерполяционный сплайн).

Если же ограничиться вычислительными агрегатами, построенными по значениям в точках приближаемой функции, то во всех случаях $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$ лагранжевы сплайны относятся к наилучшим, т.е. нет необходимости в поиске других вычислительных агрегатов, построенных по значениям в точках.

В итоге, *приходим к принципиально новому выводу*, *что использование многочленов Лагранжа в качестве базового сплайна в случаях* $2 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ и $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ *приводит к наилучшему среди всех мыслимых агрегатов приближения по линейной информацией. Такая высокая оценка даже в важнейших случаях* $p=q=2$, $p=q=\infty$ *и* $p=2$, $q=\infty$ *никогда не применялась*, *что можно понимать как полную реабилитацию этого вычислительного агрегата* 1795 *года создания. В оставшихся случаях*, *увы*, *приходится обращаться к другим средствам приближения*.

В части К(В)П-2 установлена предельная погрешность восстановления лагранжевыми интерполяционными сплайнами. В части К(В)П-3 показано, что любой вычислительный агрегат, построенный по всевозможным наборам линейных функционалов не может дать предельную погрешность большую (по порядку) нежели лагранжевы интерполяционные сплайны. Как оказалось, предельные погрешности восстановления во всех случаях эффективности лагранжевой сплайн-интерполяции имеют порядок информативной мощности соответствующего набора вычислительных агрегатов $\succ\prec N^{-r+\max\left\{0;\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right\}}$.