Квантование коэффициентов для аффинных фреймов

П. А. Терехин

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Говорят, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства F является *квантовой (ε, δ, C)-сетью* в F относительно банахова пространства числовых последовательностей X, если существуют постоянные $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $C \geqslant 1$ такие, что для любого вектора $f \in F$ найдется конечный набор целых чисел $\{m_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{Z}$ такой, что

$$\Big\| f - \sum_{k=1}^{n} m_k \delta \varphi_k \Big\|_F < \varepsilon, \qquad \Big\| \sum_{k=1}^{n} m_k \delta e_k \Big\|_X \leqslant C \|f\|_F,$$

где $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - естественный базис пространства последовательностей X. Пусть функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет носитель $\operatorname{supp} \varphi \subset [0,1]$. Далее, для $n \in \mathbb{N}$ по представлению $n = 2^k + j$, где $k = 0, 1, \dots$ и $j = 0, \dots, 2^k - 1$, положим

$$\varphi_n(t) = \varphi_{k,j}(t) = \varphi(2^k t - j).$$

Система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *аффинной системой функций*. Пусть $\varphi \in L^p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$, и $\int_0^1 \varphi(t)\, dt \neq 0$. Тогда $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фрейм в $L^p[0,1]$ относительно $X = \ell^{1,p}$, где

$$\|x\|_{1,p} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

Теорема. *Всякий аффинный фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является квантовой сетью в пространстве $L^p[0,1]$ относительно пространства последовательностей $\ell^{1,p}$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00102.