Предельный спектральный граф и асимптотика собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с потенциалом многочленом

С. Н. Туманов, А. А. Шкаликов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Исследуется предельное распределение дискретного спектра задачи на собственные значения для дифференциального уравнения второго порядка при большом значении параметра $k \to +\infty$:

$$-y''(x) + k^2 P(x, \lambda) y(x) = 0$$

с краевыми условиями $y(a) = y(b) = 0$.

Здесь a и b вещественные числа (допускаются значения $\pm\infty$), λ — обобщенный спектральный параметр, лежащий в некоторой односвязной области G комплексной плоскости; k — положительное число; P — многочлен степени $n \geqslant 1$ от x с коэффициентами аналитически зависящими от спектрального параметра $\lambda \in G$.

$$P(x, \lambda) = a_n(\lambda) x^n + a_{n-1}(\lambda) x^{n-1} + \cdots + a_1(\lambda) x + a_0(\lambda).$$

Дополнительно потребуем от P: старший коэффициент $a_n(\lambda)$ не имеет нулей в G; нули x_j, $j = 1, \ldots, n$ многочлена P — разные функции λ, либо различные ростки одной функции, аналитические в G за исключением конечного числа алгебраических точек ветвления, естественным образом возникающих в кратных нулях P.

Для произвольного комплекса Стокса Γ назовем точки a и b связанными относительно Γ, если существует соединяющий их путь, не проходящий через точки поворота этого комплекса, имеющий с Γ не более одной общей точки. Комплексы, относительно которых a и b связанны отнесем к I-му типу. Все оставшиеся — ко II-му типу.

Значения λ, при которых могут возникать многоточечные (двухточечные и более) комплексы Стокса называются сингулярными кривыми:

$$\lambda \in \gamma_s \Leftrightarrow \Re \int\limits_{x_n(\lambda)}^{x_l(\lambda)} \sqrt{P(z, \lambda)}\, dz = 0,$$

где $x_j(\lambda)$ — различные точки поворота.

Значения λ, при которых одна из точек a или b попадает на линии Стокса называются критическими кривыми:

$$\lambda \in \gamma_c \Leftrightarrow \Re \int\limits_{x_j(\lambda)}^{a} \sqrt{P(z, \lambda)}\, dz = 0, \text{ либо } \Re \int\limits_{x_j(\lambda)}^{b} \sqrt{P(z, \lambda)}\, dz = 0.$$

Введем еще так называемые регулярные предельные кривые уравнением:

$$\lambda \in \gamma_r \Leftrightarrow \Re \int\limits_{a}^{b} \sqrt{P(z, \lambda)}\, dz = 0.$$

Теорема. *Для любого компакта $g \in G$, не содержащего точек $\gamma_s \cup \gamma_c \cup \gamma_r$ найдется $k_0 > 0$ такое, что при $k > k_0$ в g не будет содержаться собственных значений. В случае общего положения собственные значения концентрируются вдоль γ_r и тех частей γ_s и γ_c, при которых граф Стокса содержит комплексы II-го типа. В этом случае справедливы асимптотики на собственные значения вдоль соответствующих частей кривых при $k \to +\infty$:*

$$\frac{k}{\pi}\int\limits_{x_n}^{x_l(\lambda_m)} \sqrt{P(z,\lambda_m)}\,dz = i(m-\frac{1}{2}) + O(\frac{1}{k}), \quad \text{в окрестности } \gamma_s;$$

$$\frac{k}{\pi}\int\limits_{x_n}^{a(b)} \sqrt{P(z,\lambda_m)}\,dz = i(m-\frac{1}{4}) + O(\frac{1}{k}), \quad \text{в окрестности } \gamma_c;$$

$$\frac{k}{\pi}\int\limits_{a}^{b} \sqrt{P(z,\lambda_m)}\,dz = im + O(\frac{1}{k}), \quad \text{в окрестности } \gamma_r;$$

Список литературы

[1] Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, “Об асимптотике собственных значений для несамосопряженных краевых задач”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **4**:2 (1964), 267–277.

[2] А. В. Дьяченко, А. А. Шкаликов, “О модельной задаче для уравнения Орра–Зоммерфельда с линейным профилем”, *Функц. анализ и его прил.*, **36**:3 (2002), 71–75.

[3] С. Н. Туманов, А. А. Шкаликов, “О локализации спектра задачи Орра–Зоммерфельда для больших чисел Рейнольдса”, *Матем. заметки*, **72**:4 (2002), 561–569.

[4] С. Н. Туманов, А. А. Шкаликов, “О предельном поведении спектра модельной задачи для уравнения Орра–Зоммерфельда с профилем Пуазейля”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:4 (2002), 177–204.

[5] М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, Москва, 1983.

[6] М. В. Федорюк, “Топология линий Стокса уравнений второго порядка”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **29**:3 (1965), 645–656.

[7] А. А. Шкаликов, “О предельном поведении спектра при больших значениях параметра одной модельной задачи”, *Матем. заметки*, **62**:6 (1997), 950–953.

[8] А. А. Шкаликов, “Спектральные портреты оператора Орра–Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса”, *СМФН*, **3** (2003), 89–112.