О наилучшем приближении функций алгебраическими полиномами в пространстве $L_{2,\mu}$

К. Тухлиев[a]

[a] *Худжандский государственный университет имени Б. Гафурова*

Пусть $L_{2,\mu} := L_2(\mu(x); [-1,1]), \mu(x) = \left(1-x^2\right)^{-1/2}$ – пространство вещественных функций f, определенных на отрезке $[-1,1]$, для которых $\mu^{1/2} f$ суммируемо с квадратом $\|f\|_{L_{2,\mu}} = \left(\int\limits_{-1}^{1} \mu(x) f^2(x) dx\right)^{1/2} < \infty$. Для произвольной $f \in L_{2,\mu}$ введем обобщенный модуль непрерывности m-го порядка: $\omega_m(f;t) = \sup\{\|\Delta_h^m(f;\cdot)\|_{L_{2,\mu}} : |h| \leqslant t\}$, где

$$\Delta_h^m(f;x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(x),$$

а $F_h f(x)$ - оператор введенный в [1] и использованный в [2,3], для получения точных неравенств Джексона-Стечкина некоторых классов функций.

Пусть теперь $\mathcal{D} = (1-x^2)\dfrac{d^2}{dx^2} - x\dfrac{d}{dx}$ – дифференциальный оператор второго порядка. Операторы высших порядков рекуррентно определим, полагая $\mathcal{D}^r f = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f)$, $(r = 2,3,\ldots)$. Символом $L_{2,\mu}^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\mu}$, которые имеют локально абсолютно непрерывные производные $(2r-1)$-го порядка, таких, для которых $\mathcal{D}^r f \in L_{2,\mu}$. Равенством $\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu} := \inf\{\|f - p_{n-1}\|_{L_{2,\mu}} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\}$ определим наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\mu}$ множеством $\mathcal{P}_{n-1}$ – алгебраических полиномов степени $n-1$.

Теорема 1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leqslant 2$, $0 < h \leqslant \pi$, $\varphi(t) \geqslant 0$ – суммируемая не эквивалентная нулю на $[0,h]$ функция. Тогда справедливы неравенства*

$$\left\{\alpha_{n,m,r,p}(\varphi;h)\right\}^{-1} \leqslant \sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}\, \varphi(t) dt\right)^{1/p}} \leqslant \left\{\inf_{n \leqslant k < \infty} \alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h)\right\}^{-1},$$

где

$$\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h) = \left(k^{2rp} \int\limits_0^h (1-\cos kt)^{mp} \varphi(t) dt\right)^{1/p}.$$

Список литературы

[1] В. А. Абилов, Ф. В. Абилова, *Ж. выч. матем. и мат. физ.*, **42**:4 (2002), 451–458.

[2] К. Тухлиев, *ДАН Республики Таджикистан*, **56**:8 (2013), 606–611.

[3] М. Ш. Шабозов, К. Тухлиев, *Известия ТулГУ*, 2014 vol 1, №1, 83–97.