Спектр и формула следа возмущения одного двумерного оператора в полосе

З. Ю. Фазуллин, И. Г. Нугаева

Башкирский государственный университет

Рассмотрим оператор $L = L_0 + V$ в пространстве $\mathcal{L}_2(\Pi)$, где $\Pi = \{(x;y) : \ x \in \mathbb{R}, \ y \in [0;\pi]\}$, L_0 – оператор задачи Дирихле: $L_0 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, V – оператор умножения в пространстве $\mathcal{L}_2(\Pi)$ на ограниченную измеримую вещественную функцию $V(x,y)$, финитную по переменной x (т.е. для некоторого $r > 0$ $V(x,y) \equiv 0$, $|x| \geqslant r$).

Пусть $P_s^{(1)}$, $P_l^{(2)}$ – ортопроекторы на собственные подпространства одномерных операторов Лапласа задачи Дирихле и гармонического осциллятора, соответствующие собственным числам s^2, $s = 1, 2, \ldots$, и $2l + 1$, $l = 0, 1, \ldots$, соответственно.

Теорема 1. *Спектр оператора L_0 состоит из собственных чисел $\lambda_n = n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1;3\}$ с кратностями*

$$\nu_n = \begin{cases} \left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right], & \text{если} \quad \left(2\left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right]\right)^2 \leqslant \lambda_n \leqslant \left(2\left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right]+1\right)^2, \\ \left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right] + \frac{(-1)^n+1}{2}, & \text{если} \quad \left(2\left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right]+1\right)^2 < \lambda_n < \left(2\left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right]+2\right)^2, \end{cases}$$

причем $P_n = \sum\limits_{s=1}^{\nu_n} P_s^{(1)} \otimes P^{(2)}_{n/2-(s^2+1)/2}$.

Теорема 2. *Пусть $V(x;y) \in C_0^{(2)}(\Pi)$, тогда для собственных чисел $\mu_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu_n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1;3\}$, оператора L справедливо тождество*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1;3\}} \left(\sum_{i=1}^{\nu_n} (\lambda_n - \mu_i^{(n)}) + \operatorname{tr}(P_n V) \right) = \frac{1}{12\pi} \int_\Pi V^2(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y. \tag{1}$$

Доказательство последней теоремы основано на методике работы [1].

Работа выполнена при поддержке гранта 01201456408 Минобрнауки РФ

Список литературы

[1] З. Ю. Фазуллин, Х. Х. Муртазин, “Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора”, *Математический сборник*, **192**:5 (2001), 87–124.