О приближенном решении одного класса поверхностных интегральных уравнений методом коллокации

Э. Г. Халилов

Азербайджанская государственная нефтяная академия

Известно (см. [1]), что внешняя краевая задача Дирихле для уравнения Гельмгольца приводится к граничному интегральному уравнению

$$\rho\,(x) + (A\rho)\;(x) = g\,(x)\,, \tag{1}$$

где $(A\rho)\;(x) = \left(\tilde{K}\rho\right)\;(x) - i\eta\;(L\rho)\;(x)$, $g\;(x) = (Tf)\;(x) - i\eta\;((Kf)\;(x) - f\,(x))$,

$$(\tilde{K}\rho)\,(x) = \;2\int_S \frac{\partial\Phi_k\,(x,y)}{\partial\vec{n}\;(x)}\,\rho\,(y)\;dS_y, (L\rho)\,(x) = 2\int_S \Phi_k\,(x,y)\;\rho\,(y)\;dS_y,$$

$$(Tf)\,(x) = 2\frac{\partial}{\partial\vec{n}\,(x)}\left(\int_S \frac{\partial\Phi_k\,(x,y)}{\partial\vec{n}\;(y)}\,f\,(y)\;dS_y\right),$$

$$(Kf)\,(x) = 2\int_S \frac{\partial\Phi_k\,(x,y)}{\partial\vec{n}\;(y)}\,f\,(y)\;dS_y, x\in S,$$

$S-$ замкнутая и дважды непрерывно дифференцируемая поверхность в $\mathbb{R}^3$, $\Phi_k\,(x,y) = e^{ik\,|x-y|}/\,(4\pi\;|x-y|)$, $x,y\in\mathbb{R}^3$, $x\neq y$, $k-$ волновое число, причем $Im\,k\geqslant 0$, $\eta\neq 0-$ произвольное действительное число, причем $\eta\,Rek\geqslant 0$, $f\,(x)-$ дважды непрерывно дифференцируемая функция на S, а $\rho\,(x)-$ искомая непрерывная функция на S.

Уравнение (1) имеет то преимущество, что его решение является нормальной производной решения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца на S. При этом функция

$$u\,(x) = \int_S \left\{f\,(y)\,\frac{\partial\Phi_k\,(x,y)}{\partial\vec{n}\;(y)}\; - \rho\,(y)\;\Phi_k\,(x,y)\right\}dS_y\,,\quad x\in\mathbb{R}^3\backslash\bar{D},$$

является решением внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца, где $D\subset\mathbb{R}^3-$ ограниченная область с границей S. Кроме того, отметим, что решение уравнения (1) является решением уравнения моментов (см. [1]).

Так как интегральное уравнение (1) в замкнутом виде решается лишь в очень редких случаях и до сих пор не исследованы приближенные методы решения уравнения (1), то первостепенное значение приобретает разработка приближенных методов решения интегрального уравнения (1) с соответствующим теоретическим обоснованием.

В данной работе предложен новый метод построения кубатурных формул для поверхностных сингулярных интегралов и дано обоснование метода коллокации к граничному интегральному уравнению (1).

Список литературы

[1] Д. Колтон, Р. Кресс, *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния*, Мир, М., 1987, 311 с.