О точном значении неопределенной константы в асимптотической формуле для константы Лебега классического оператора Фурье

И. А. Шакиров

Набережночелнинский институт социально-педагогических технологий и ресурсов

Оператор Фурье $S_n : C[0, 2\pi] \to H_n^T \subset C[0, 2\pi]$ имеет минимальную норму (константу Лебега $\widetilde{\lambda_n} = \widetilde{\lambda}(n) = \|S_n\|$) среди всевозможных линейных проекторов $P_n : B \to H_n^T \subset B$ $(n \in N)$, действующих в пространствах $B = C \vee L_p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ [1, с.191]. Особый интерес представляет поведение величин $\widetilde{\lambda_n}$ $(n \in N \wedge n \to +\infty)$ и $O(1)$, входящих в известное асимптотическое равенство

$$\widetilde{\lambda_n} = (4/\pi^2) \ln n + O(1), \ n \to \infty \ (O(1) - const), \tag{1}$$

которое получено, используя ее интегральное представление вида

$$\widetilde{\lambda_n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt \left(D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} \right). \tag{2}$$

Свойства оператора Фурье в различных функциональных пространствах, его фундаментальные характеристики подробно изучены А. Лебегом, Л. Фейером, Г. Сеге и другими зарубежными математиками. Существенный вклад в развитие данного направления внесли С. Н. Бернштейн, С. М. Никольский, П. К. Суетин, С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский, их многочисленные ученики и последователи. Активные исследования в этом направлении ведутся и в настоящее время. Особое внимание обращается получению двусторонних оценок для фундаментальных характеристик, изучению аппроксимативных возможностей частичных сумм Фурье, Фурье-Лежандра, Фурье-Якоби и других ее видов на различных классах функций.

В случае лагранжевой интерполяции по равномерно распределенным на периоде узлам аналоги констант Лебега (1) подробно изучены в работах [2], [3]. Следуя им, в данной работе впервые получено явное (безмодульное) представление для константы (2), на основе которого затем найдено точное значение $O(1)$ из (1), решена одна актуальная экстремальная задача. Соответствующие результаты приведены в трех теоремах.

Теорема 1. *Для константы* (2) *верно явное* (*безмодульное*) *представление вида*

$$\widetilde{\lambda_n} = \frac{2}{\pi} \int_0^T \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_0^T \left[\frac{\cos(2n+1)t}{\sin(t+t_{2k-1})} + \frac{\sin(2n+1)t}{\sin(t+t_{2k})} \right] dt. \tag{3}$$

где $t \in [0, T], t_{2k-1} = \frac{\pi}{4n+2}(2k-1), \ t_{2k} = \frac{\pi}{4n+2} 2k \ (k = \overline{1, n}); \ T = \frac{\pi}{2(2n+1)}, n \in N.$

Теорема 2. *Для вычисления асимптотически точного значения константы* $O(1)$ *из равенства* (1) *справедлива формула*

$$O(1) = \frac{4}{\pi^2} \ln(\frac{4}{\pi}) + \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \frac{8}{\pi^3} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} = 1.064313253\ldots$$

Теорема 3. *Наименьшее значение константы* A, *для которой неравенство* $\widetilde{\lambda_n} \leqslant A + (2/\pi)^2 \ln n$ *выполняется равномерно относительно любых натуральных значений параметра* n, *равно* $1/3 + 2\sqrt{3}/\pi$, *т.е.*

$$\min_{A \in R^+} \{A | \widetilde{\lambda_n} \leqslant A + (2/\pi)^2 \ln n \ \forall n \in N\} = 1/3 + 2\sqrt{3}/\pi = 1.435991124\ldots$$

Список литературы

[1] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во МГУ, М., 1976.

[2] L. Brutman, "Lebesgue functions for polynomial interpolation – a survey", *Ann. Numer. Math.*, **4** (1997), 111–127.

[3] И. А. Шакиров, "О влиянии выбора узлов лагранжевой интерполяции на точные и приближенные значения констант Лебега", *Сиб. матем. журнал*, **55**:6 (2014), 1404–1423.