Представления решений одного класса системы уравнений в полных дифференциалах с сингулярными точками

Б. Шарипов

Институт предпринимательства и сервиса, Душанбе

В некоторых работах [1]-[5] были исследованы различные классы системы линейных и нелинейных уравнений в полных дифференциалах (п.д.-системы) для функций двух и многих независимых переменных, причем как регулярных, так и с сингулярными точками. В случае тождественного выполнения условия совместности, многообразия их решений изучаемых систем находятся вполне определёнными формулами.

В предлагаемом сообщении рассматривается один тип нелинейных п.д.-систем с сингулярными точками, для которых условия совместности выполняются тождественно и многообразия решений находятся явно.

1. Рассматрим систему уравнений в полных дифференциалах вида:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{a(\rho,\varphi,\Theta)}{\rho^n}u + \frac{f(\rho,\varphi,\Theta)}{\rho^n}u^m,\\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{b(\rho,\varphi,\Theta)}{\rho^{n-1}}u + \frac{g(\rho,\varphi,\Theta)}{\rho^{n-1}}u^m,\\ \frac{\partial u}{\partial \Theta} = p(\rho,\varphi,\Theta,u),\end{gathered} \tag{1}$$

где $a, b, f, g, p \in C^1(\bar{D})$, известные функции, а $u \in C^2(D_0), (n \geqslant 0)$ неизвестная функция. Условий совместности системы (1) имеют вид:

$$\begin{gathered}\Big[\frac{\partial}{\partial \rho}(\frac{b}{\rho^{n-1}}) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(\frac{a}{\rho^n})\Big]u + \Big[\frac{\partial}{\partial \rho}(\frac{g}{\rho^{n-1}}) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(\frac{f}{\rho^n}) + (m-1)\frac{ag-bf}{\rho^{2m-1}}\Big]u^m = 0,\\ \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{au+bu^m}{\rho^m}\frac{\partial p}{\partial u} = (\frac{a}{\rho^n} + m\frac{f}{\rho^n}u^{m-1})p + \frac{\partial}{\partial \Theta}(\frac{a}{\rho^n})u + \frac{\partial}{\partial \Theta}(\frac{f}{\rho^n})u^m,\\ \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{bu+gu^m}{\rho^{n-1}}\frac{\partial p}{\partial u} = (\frac{b}{\rho^{n-1}} + m\frac{g}{\rho^{n-1}}u^{m-1})p + \frac{\partial}{\partial \Theta}(\frac{b}{\rho^{n-1}})u + \frac{\partial}{\partial \Theta}(\frac{g}{\rho^{n-1}})u^m,\end{gathered} \tag{N_1}$$

Допустим, что каждые соотношения из (N_1) выполнится, но не тождественно. Если считать, что найденные функций $u = 0$, $u = H(\rho,\varphi,\Theta)$ из системы (N_1) удовлетворяют системе (1), то они будут только лишь частными, либо особыми решениями системы (1). Для нахождения многообразия решений системы (1) будем требовать тождественного выполнения условию (N_1). Допустим, что в системе (1) a, b, f, g считаются некоторыми известными функциями, тогда предыдущее требование возможно тогда и только тогда, когда взаимосвязь между этими функциями можно определить, частично, следующим образом:

$$b(\rho,\varphi,\Theta) = \Big[\frac{\partial}{\partial \varphi}A(\rho,\varphi,\Theta) + \alpha(\varphi,\Theta)\Big]\rho^{n-1}, A(\rho,\varphi,\Theta) = -\int_\rho^1 \frac{a(t,\varphi,\Theta)}{t^n}dt. \tag{2}$$

Производя замену $u^{1-m}=W$, где $W=W(\rho,\varphi,\Theta)$ – новая неизвестная функция, перепишем систему уравнений (1) в следующем виде:

$$\frac{\partial W}{\partial\rho}=\alpha(\rho,\varphi,\Theta),\ \frac{\partial W}{\partial\varphi}=\beta(\rho,\varphi,\Theta),\ \frac{\partial W}{\partial\Theta}=\gamma(\rho,\varphi,\Theta,W), \tag{3}$$

$$\alpha(\rho,\varphi,\Theta)=(1-m)\cdot\frac{f(\rho,\varphi,\Theta)}{\rho^n}\cdot\exp\{(m-1)\omega_0(\rho,\varphi,\Theta)\},$$

$$\beta(\rho,\varphi,\Theta)=(1-m)\cdot\frac{g(\rho,\varphi,\Theta)}{\rho^{n-1}}\cdot\exp\{(m-1)\omega_0(\rho,\varphi,\Theta)\},$$

причем, $\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\frac{b}{\rho^{n-1}})\right]=\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(\frac{a}{\rho^n})\right]$, $\omega_0(\rho,\varphi,\Theta)=\int_\rho^1\frac{a(t,\varphi,\Theta)}{t^n}dt+\hat{A}(\varphi,\Theta)$. А также, делаем замену:

$$s_0(\rho,\varphi,\Theta)=(1-m)\int_\rho^1\frac{f(t,\varphi,\Theta)}{t^n}\cdot\exp\{(m-1)\omega_0(\rho,\varphi,\Theta)\}dt+A_1(\varphi,\Theta),$$

или

$$s_0(\rho,\varphi,\Theta)=\int_\rho^1\alpha(t,\varphi,\Theta)dt+\int_0^\varphi\beta(1,\tau,\Theta)d\tau.$$

Поскольку $\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}=\frac{\partial\beta}{\partial\rho}$, преобразуем систему (3) к более простому виду. Условия (N1) для инвариантной системе (3) выполняется тождественно, если функция $\gamma(\rho,\varphi,\Theta)$ принимает вид:

$$\gamma(\rho,\varphi,\Theta,W)=(m-1)\frac{\partial s_0}{\partial z}W+(1-m)\exp\{-s_0(\rho,\varphi,\Theta)\}W^{\frac{m}{m-1}}\times b(\rho,\varphi,\exp\{s_0(\rho,\varphi,\Theta)\}W^{\frac{1}{1-m}}).$$

В этой формуле переходя к исходной неизвестной функции, имеем:

$$p(\rho,\varphi,\Theta,u)=\frac{\partial\omega_0}{\partial\Theta}u$$

$$+\frac{1}{1-n}\{\frac{\partial s_0}{\partial\Theta}+f[\Theta;exp\{(m-1)\omega_0(\rho,\varphi,\Theta)\}u^{1-m}-s_0(\rho,\varphi,\Theta)]\}\times\exp\{(1-m)\omega_0(\rho,\varphi,\Theta)\}u^m. \tag{4}$$

Интегрируем первую пару уравнений системы (3), и делаем замену

$$\exp\{(1-m)\omega_0(\rho,\varphi,\Theta)\}u^m-v_0(\rho,\varphi,\Theta)=\psi, \tag{5}$$

где $\psi=\psi(\Theta)$ - новая неизвестная функция. Далее подставим ее результат в третье уравнение системы (3), получим обыкновенное дифференциальное уравнение (о.д.у.),

$$\psi'=f(\Theta,\psi), \tag{6}$$

где функция $f(\Theta,\psi)$ определяется через данные функций из (4). Если о.д.у. (6) имеет решение вида $\psi=\psi(C,\Theta)$, тогда п.д.- система (1) также разрешима, и многообразие её решений определяется следующей явной формулой:

$$u(\rho,\varphi,\Theta)=[s_0(\rho,\varphi,\Theta)+\psi(,\Theta)]^{\frac{1}{1-n}}\cdot\exp\{\omega_0(\rho,\varphi,\Theta)\}. \tag{7}$$

Легко заметит, что функция $A(\rho,\varphi,\Theta)$ в точке $\rho=0$ имеет особенность $(n-1)$-го порядка при $n>1$, при этом, функции ω_0, s_0 и решение системы (1) в точке $\rho=0$ имеют особенности показательного порядка, а в остальных точках $\rho\neq0$ области $\bar{D}$, является однозначным и непрерывным.

Теорема. *Пусть в п.д.-системе* (1) $a, b, f, g, pinC^1(\bar{D}), u \in C^2(\bar{D}_0)$. *Если условия* (N_1) *выполняются, но не тождественно, то возможно система* (1) *имеет некоторое частное, либо особое решение. Для того, чтобы условия* $(N1)$ *выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции* $b(\rho, \varphi, \Theta)$ *и* $p(\rho, \varphi, \Theta, u)$ *соответственно имели вид* (2) *и* (4). *Если о.д.у. вида* (6) *имеет решение, тогда система* (1) *также разрешима, причём многообразие ее решений найдётся явной формулой* (7). *При этом полученное решение системы* (1) *при* $n \geqslant 1$ *в точке* $\rho = 0 \in \bar{D}$ *не ограниченно, имеет особенности показательного порядка, а в других точках области* $\bar{D}$*- является непрерывной.*

Список литературы

[1] Л. Г. Михайлов, *ДАН*, **322** (1992), 646–650.

[2] Л. Г. Михайлов, *ДАН*, **354**:1 (1997), 21–24.

[3] Л. Г. Михайлов, *ДАН*, **384**:6 (2002), 731–737.

[4] Л. Г. Михайлов, *ДАН*, **398**:2 (2004), 1–4.

[5] Л. Г. Михайлов, *Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями*, Дониш, Душанбе, 1986, 116 с.

[6] Б. Шарипов, *Докл. АН Республики Таджикистан*, **53**:10 (2010), 759–766.