Точные значения n-поперечников некоторых классов функций, принадлежащих пространству Харди $H_{q,\rho}$ $(1 \leqslant q \leqslant \infty,\ 0 < \rho \leqslant 1)$

Г. А. Юсупов

Таджикский национальный университет

Пусть H_q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ – банахово пространство Харди аналитических в единичном круге $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_q := \lim_{\rho \to 1-0} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q}.$$

Символом $H_{q,\rho}$ $(1 \leqslant q \leqslant \infty,\ 0 < \rho \leqslant 1)$ обозначим пространство Харди аналитических в круге $|z| < \rho$ функций f, для которых $\|f\|_{q,\rho} := \|f(\rho z)\|_q < \infty$. Через $f_a^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$ обозначим r-ю производную функции f по аргументу t переменного $z = \rho exp(it)$. Под $H_{q,a}^{(r)}$ понимаем класс функций $f \in A(U)$, у которых $f_a^{(r)} \subset H_q$. Пусть $\Phi(t)$, $t \geqslant 0$ – произвольная непрерывная неотрицательная и неубывающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Введем в рассмотрение следующий класс аналитических функций

$$W_{q,a}^{(r)}(\Phi; \mu) := \left\{ f \in H_{q,a}^{(r)} : \frac{1}{h} \int\limits_0^h \omega(f_a^{(r)}; 2t)_q \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right] dt \leqslant \Phi(h) \right\},$$

где $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $h \in (0, \pi]$ и $\mu \in \mathbb{R}_+$ $(\mu \geqslant 1)$ – произвольное фиксированное число.

Положим $(\sin x)_* = \{\sin x,\ \text{если}\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/2;\ 1,\ \text{если}\ x \geqslant \pi/2\}$. Имеет место

Теорема. *Если при заданном $\mu \geqslant 1$ и любых $n \in \mathbb{N}$, $h \in (0, \pi]$ мажоранта $\Phi(h)$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/(2\mu n))} \geqslant \frac{\pi}{2\mu} \int\limits_0^1 (\sin nht)_* \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2} \right] dt, \tag{1}$$

то при любых $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$, $0 < \rho \leqslant 1$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ справедливы равенства

$$\lambda_n(W_{q,a}^{(r)}(\Phi; \mu); H_{q,\rho}) = \frac{\pi \rho^n}{4\mu n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n} \right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников: Бернштейна $b_n(\cdot)$, Гельфанда $d^n(\cdot)$, Колмогорова $d_n(\cdot)$, линейного $\delta_n(\cdot)$. Множество мажорант, удовлетворяющих условию (1), не пусто.

Список литературы

[1] С. Б. Вакарчук, *Матем. заметки*, **72**:5 (2002), 665–669.

[2] М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов, *ДАН Республики Таджикистан*, **57**:2 (2014), 97–102.