

О работах С. М. Никольского по теории приближений

Приближение суммами Фурье (1945)

$$\sup_{f \in W^r H(\omega)} \|f(x) - s_n(f, x)\|_C = \\ = \theta_n \frac{2}{\pi^2} \frac{\log n}{n^r} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + O\left(\frac{1}{n^r} \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\theta_n \in [1/2, 1]$ и $\theta_n = 1$, если ω — выпуклый вверх модуль непрерывности.

А. В. Ефимов (1960). $\theta_n \in [2/3, 1]$ и $2/3$ нельзя увеличить.

В. С. Бирюкова (2007). Если ω не является функцией, выпуклой вверх на $[0, \pi/n]$, то $\theta_n < 1$.

Теоремы двойственности (1946)

Пусть B – банахово пространство и B^* — сопряжённое с B пространство.

Теорема. Для каждого элемента $x \in B$

$$\min_{a_k} \left\| x - \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\|_B = \max_F F(x),$$

где максимум берётся по $F \in B^*$, для которых $\|F\|_{B^*} \leq 1$ и $F(x_1) = \dots = F(x_n) = 0$.

Теорема. Для каждого функционала $F \in B^*$

$$\min_{a_k} \left\| F - \sum_{k=1}^n a_k F_k \right\|_{B^*} = \sup_x F(x),$$

где верхняя грань берётся по $x \in B$, для которых $\|x\|_B \leq 1$ и $F_1(x) = \dots = F_n(x) = 0$.

Приближение алгебраическими многочленами

Для простоты рассмотрим приближение функций класса $Lip\alpha$ при $\alpha < 1$.

Согласно результатам Джексона, Бернштейна и Валле Пуссена 1911—1919 гг при приближении тригонометрическими полиномами утверждения $f \in Lip\alpha$ и $E_n(f) \leq A/n^\alpha$, где A — некоторая постоянная, равносильны. А для приближений алгебраическими многочленами это не так.

Путь к решению задачи о характеристизации класса функций $Lip\alpha$ на конечном отрезке с помощью приближений алгебраическими многочленами открыла работа С. М. Никольского 1946 г.

Благодаря последовавшим за этой работой исследованиям было выяснено, что если в теоремах о приближении тригонометрическими полиномами заменить $1/n$ на

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}$$

получим соответствующее утверждение о приближении алгебраическими многочленами на отрезке $[-1, 1]$.

Квадратурные формулы

С. М. Никольскому (1950) принадлежат постановка задачи и первые результаты о наилучших квадратурных формулах, когда за счёт выбора узлов x_k и весов a_k на классах функций минимизируется уклонение

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) \right|.$$

При этом С. М. Никольским, в частности, было найдено точное решение одной специальной задачи о приближении функций сплайнами.

Значительную роль в теоретических исследованиях и в практике приближённого вычисления интегралов сыграла книга С. М. Никольского «Квадратурные формулы», выдержавшая несколько изданий, первое из которых относится к 1958 году.

Приближение сферическими многочленами

Совместный с П.И. Лизоркиным цикл работ 1983 – 1989 гг.

Приближение на многообразиях

Цикл работ 1990—2003 гг.