КРИТЕРИИ ПОЧТИ НИЛЬПОТЕНТНОСТИ ГРУПП ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ. СТРУКТУРНЫЕ ТЕОРЕМЫ.

Бекларян Л.А.
Центральный Экономико-Математический Институт РАН
beklaryan@mailfrom.ru   beklar@cemi.rssi.ru

Москва, 2 сентября 2015, Конференция посвященная 60 летию А.А.Шананина

Для класса конечно порожденных групп диффеоморфизмов прямой и окружности с взаимно трансверсальными элементами приводятся критерии почти нильпотентности, а также структурные теоремы. При доказательстве структурных теорем ключевыми являются факт наличия, либо отсутствия инвариантной меры, ранее полученный критерий существования инвариантной меры, а также его переформулировки в терминах различных характеристик группы (топологических, алгебраических, комбинаторных). Обсуждается вопрос о типичности как ряда свойств отмеченных характеристик, так и факта существования инвариантной меры для групп диффеоморфизмов прямой и окружности.

Введение

Одним из центральных вопросов в теории динамических систем является проблема существования метрических инвариантов, и в частности, существования инвариантной меры. Инвариантные меры и связанные с ними характеристики, в свою очередь, являются ключевыми при доказательстве структурных теоремах для групп диффеоморфизмов прямой и окружности, к изучению которых мы и приступаем.

Пусть Σ есть σ-алгебра борелевских множеств топологического хаусдорфова пространства X, а тройка (X, Σ, μ) пространство с борелевской (вероятностной, если X компакт) мерой.

Определение 1. *Борелевская (вероятностная, если X компакт) мера μ, конечная на компактах, называется инвариантной относительно группы $G \subseteq Homeo\,(\mathbb{X})$, если для любых $g \in G$, $B \in \Sigma$ выполняется условие $\mu(g^{-1}(B)) = \mu(B)$.* ■

Первым, наиболее значимым, результатом по вопросу существования инвариантной меры является теорема Боголюбова-Крылова-Дэйя.

Теорема 1 (Боголюбов-Крылов-Дэй (1937)[1],(1957)[2])**.** *Для аменабельной группы G, действующей гомеоморфизмами на компакте X, существует вероятностная борелевская инвариантная мера.* ■

Даже для группы гомеоморфизмов окружности, теорема Боголюбова-Крылова-Дэйя и ее модификации оставались всего лишь признаками существования инвариантной меры, но не критериями.

Для групп гомеоморфизмов прямой (окружности) $Homeo_+(\mathbb{X}), \quad \mathbb{X} = \mathbb{R}, \mathbb{S}^1$ к наиболее существенным продвижениям в проблематике существования инвариантной меры следует отнести работу Plante [3], в которой для конечно порожденных групп гомеоморфизмов прямой удалось сформулировать критерий существования инвариантной меры в терминах асимптотических характеристик исходной группы.

Определение 2. *Для конечно порожденной группы $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$ орбита $G(t)$ точки $t \in \mathbb{R}$ имеет неэкспоненциальный рост, если*

$$\lim_{n\to\infty} \inf \sqrt[n]{|G^n(t)|} = 1.$$

где G^n — слова длины не более чем n, а $|G^n(\,t)|$ — мощность множества точек $\{g(t) : g \in G^n\}$. ■

Теорема 2 (Plante (1975) [3])**.** *Пусть $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$ — конечно–порожденная группа. Для существования борелевской меры, конечной на компактах и инвариантной относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы существовала точка $t \in \mathbb{R}$, орбита которой имеет неэкспоненциальный рост.* ■

Важно, что это критерий и он справедлив даже в случае некомпактности пространства действий т.е. в случае прямой. К сожалению, такой критерий не может быть распространен на группы не являющиеся конечно порожденными. Точно также, в случае окружности (компактный случай), не удавалось соотнести условия теорем Plante и Боголюбова-Крылова-Дэйя.

Отметим, что критерий Plante связан с асимптотическим поведением роста точек орбиты. Такого типа асимптотическое поведение, но уже для слов в абстрактной группе, определяет рост группы. Для абстрактной конечно порожденной группы *рост группы* $G =< g_1, ..., g_s >$ определяется по следующему правилу:

$$\lambda(G) = \lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{\gamma_G(r)},$$

где

$$\gamma_G(r) = \sharp\{g : \ g = g_{i_1}^{\varepsilon_1}, ..., g_{i_m}^{\varepsilon_m}, \ m \leq r, \ i_j \in \{1, ..., s\}, \ \varepsilon_j = +(-)1, \ j = 1, ..., m.\}$$

Если $\lambda(G) > 1$, то группа имеет *экспоненциальный рост*, если $\lambda(G) = 1$, то группа *субэкспоненциального роста.* Если для группы $G =< g_1, ..., g_s >$ функция $\gamma_G(r)$ по переменной n растет быстрее чем любая полиномиальная функция, но медленнее чем экспоненциальная, то такая группа называется группой *промежуточного роста.*

Для конечно порожденной группы $G =< g_1, ..., g_s >$ рост $\lambda(G)$ всегда определен, а свойство иметь субэкспоненциальный рост, либо промежуточный рост не зависит от выбранной системы образующих. Для конечно порожденной группы, содержащей свободную подполугруппу с двумя образующими, рост экспоненциальный. С другой стороны, по теореме Громова [33] почти нильпотентная группа и только она имеет полиномиальный рост.

Очевидно, что существование инвариантной меры эквивалентно условию не пустоты носителя такой меры. На этом пути, для произвольной группы гомеоморфизмов прямой (окружности) и был, ранее, сформулирован критерий существования инвариантной меры в терминах топологической характеристики группы. Приводится формулировка такого критерия и его различные переформулировки в терминах иных характеристик группы. Такие переформулировки важны для задачи классификации групп гомеоморфизмов прямой (окружности). Для конечно порожденных групп диффеоморфизмов $G \subseteq Diff_+^1(\mathbb{X}), \quad \mathbb{X} = \mathbb{R}, \mathbb{S}^1$ прямой и окружности с взаимно трансверсальными элементами удается сформулировать критерии почти нильпотентности, а также структурные теоремы. Рассматриваются вопросы о типичности как свойств ряда характеристик таких групп, так и факта существования инвариантной меры. Критерием почти нильпотентности рассматриваемых групп является условие отсутствия свободной подполугруппы с двумя образующими. Поэтому рост таких групп удовлетворяет экстремальному свойству: либо экспоненциальный, либо полиномиальный. В работе Navas [5] такой же критерий был установлен для групп диффеоморфизмов

$G \subseteq Diff_+^{1+\alpha}([0,1]),\ \ \alpha > 0$. Очевидно, что такие группы не могут быть группами промежуточного роста. Вместе с тем, Navas [6] показал, что группа промежуточного роста, ассоциированная с группой Григорчука [7], может быть реализована как подгруппа группы $Diff_+^1([0,1])$.

В параграфах 1 и 2 приводятся предварительные результаты по минимальным множествам, а также по критерию существования инвариантной меры и его различным переформулировкам. В параграфе 3 приведены критерии почти нильпотентности для рассматриваемого класса групп диффеоморфизмов прямой и окружности, а также структурные теоремы. Обсуждаются вопросы о типичных свойствах групп диффеоморфизмов прямой и окружности. В частности, приводится ранее полученный результат о "массивности" класса конечно порожденных групп $G \subseteq Diff_+^2(\mathbb{S}^1)$ с фиксированным числом образующих и взаимно трансверсальными элементами в пространстве всех конечно порожденных подгрупп группы $Diff_+^2(\mathbb{S}^1)$ с тем же числом образующих.

Более подробно по метрическим инвариантам групп гомеоморфизмов прямой и окружности, а также вопросам классификации таких групп можно ознакомиться в обзорах автора [8]-[9]. По вопросам аменабельности, а также ряда важных конструкций для псевдогрупп и дискретных метрических пространств можно обратиться к обзору Григорчука с соавторами [10]. По абстрактным группам, комбинаторной теории групп и ее одной из центральных проблем-проблеме Бернсайда о периодических группах, следует обратиться к работе Адяна [11].

1 Минимальные множества.

Определим важное подмножество G^S группы $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{X})$, $\mathbb{X} = \mathbb{R}, \mathbb{S}^1$ как объединение стабилизаторов точек $t \in \mathbb{X}$

$$G^S = \bigcup_{t \in \mathbb{X}} St_G(t), \tag{1}$$

и связанную с ним топологическую характеристику

$$Fix\, G^S = \{t \in \mathbb{X} : \quad \forall g \in G^S, \quad g(t) = t\}. \tag{2}$$

Другой важной топологической характеристикой для группы $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{X})$ является минимальное множество.

Определение 3. *Минимальное множество группы $G \subseteq Homeo(\mathbb{X})$– это замкнутое G-инвариантное подмножество $\mathbb{X}$, не содержащее собственных замкнутых G-инвариантных подмножеств. Если не существует непустого минимального множества, то по определению будем полагать, что оно пустое.*■

Важность минимальных множеств состоит в том, что они определяют носители метрических инвариантов.

Теорема 3 (BEKL(1996)[12])**.** *Пусть $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{X})$. Тогда справедливо одно из следующих взаимоисключающих утверждений:*

а) *любое минимальное множество дискретно и принадлежит множеству $Fix\ G^S$, а множество $Fix\ G^S$ состоит из объединения минимальных множеств E_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, т.е. $Fix\ G^S = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} E_\alpha$, для которого вводится обозначение $E(G) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} E_\alpha$;*

б) *минимальное множество единственное, является совершенным нигде не плотным подмножеством $\mathbb{R}$, содержится в замыкании орбиты $\overline{G(t)}$ произвольной точки $t \in \mathbb{X}$ и обозначается через $E(G)$;*

в) *минимальное множество совпадает с $\mathbb{X}$ и также обозначается через $E(G)$;*

г) *минимальное множество $E(G)$ пустое (в случае $\mathbb{X} = \mathbb{R}$).*■

При $\mathbb{X} = \mathbb{S}^1$ минимальное множество всегда не пустое. В случае $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ для формулировки признака существования непустого минимального множества определим подмножество

$$G^S_\infty = \{g \in G^S : \quad \sup\{t : g(t) = t\} = +\infty, \quad \inf\{t : g(t) = t\} = -\infty\}. \tag{3}$$

Предложение 1 (BEKL(1996)[12]). *Пусть $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$ и выполняется хотя бы одно из условий:*

а) G конечно порожденная группа;

б) $Fix\ G^S \neq \emptyset$,

в) $G \neq G^S_\infty$.

Тогда существует непустое минимальное множество.■

Приведенный признак существования непустого минимального множества основан на структурных свойствах группы гомеоморфизмов прямой. Приведем критерий существования непустого минимального множества, основанного на локальных свойствах гомеоморфизмов.

Предложение 2 (Plante (1983) [13], Salhi (1982-1985) [14]-[16]). *Пусть $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$ счетная группа. Если G — абелева и ее элементы принадлежат $Diff^2(\mathbb{R})$, или элементы G задаются аналитическими функциями, то существует непустое минимальное множество.*■

Существуют примеры счетных абелевых групп гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, для которых минимальное множество пустое.

Важно знать о наследственных свойствах минимальных множеств.

Теорема 4 (BEKL(1999)[17]). *Пусть $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{X})$. Если для подгруппы $\Gamma \subseteq G$ минимальное множество $E(\Gamma)$ не пусто и не дискретно, то $E(\Gamma) \subseteq E(G)$.*■

Дадим усиление этой теоремы для нормальных подгрупп.

Теорема 5 (BEKL(1999)[17]). *Пусть $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{X})$. Если для нормальной подгруппы $\Gamma \subseteq G$ минимальное множество $E(\Gamma)$ не пусто и не дискретно, то оно совпадает с минимальным множеством исходной группы G, т.е. $E(\Gamma) = E(G)$.*■

Как видим, минимальные множества нормальных подгрупп группы $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{X})$ обладают *экстремальным свойством*: они или дискретны, или совпадают с минимальным множеством исходной группы G. В условиях теоремы 5, нормальная подгруппа Γ и исходная группа G имеют одно и то же минимальное множество. Этот факт особенно полезен в случае, когда для исходной группы существует алгебраически более простая подгруппа, имеющая то же минимальное множество, что и исходная группа.

Определим одну важную подгруппу исходной группы, связанную с минимальным множеством.

Определение 4. *Для группы $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{X})$ нормальная подгруппа H_G определяется следующим образом:*

1) *если минимальное множество не пусто, то положим*

$$H_G = \{h \in G : \quad E(G) \subseteq Fix < h >\}$$

(если минимальное множество непусто и дискретно, то $H_G = G^S$, так как из дискретности минимального множества следует непустота множества $Fix\, G^S$ и равенство $E(G) = Fix\, G^S$);

2) *если минимальное множество пусто, то положим $H_G = G$.* ■

Заметим, если минимальное множество совпадает со всей прямой, то $H_G =< e >$.

Несколько замечаний по истории вопроса. К ранним исследованиям по минимальным множествам относятся работы Данжуа для циклической группы диффеоморфизмов окружности гладкости $C^{(2)}$. В частности, был получен первый результат об отсутствии минимального множества, изоморфного канторову множеству, который известен под названием теоремы Данжуа [18]. Изучение структуры минимального множества для произвольной группы $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ гомеоморфизмов окружности началось значительно позже. Наиболее ранняя работа, затрагивающая этот вопрос, это курс лекций: Л.Альфорс. Преобразования Мебиуса в многомерном пространстве.М.: Мир, (1986). Этот вопрос весьма важен и для произвольной группы гомеоморфизмов прямой $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$ [19],[20]. В отличие от групп гомеоморфизмов окружности, в случае прямой возникает дополнительная трудность, связанная с установлением факта непустоты минимального множества. Непустота минимального множества была установлена и для некоторых групп диффеоморфизмов прямой [13],[14]-[16]. Справедливость же теоремы Данжуа следует ожидать только при дополнительных ограничениях на группу гомеоморфизмов прямой (окружности). В частности, такое утверждение получено для одного важного класса квазисимметрических групп [19], а также для групп $G \subseteq Diff^{(1+\alpha)}([0,1]),\ \ \alpha > 0$ диффеоморфизмов интервала [5]. Более детальное обсуждение по этому вопроса можно найти в обзоре [8].

2 Инвариантные меры.

Приведем формулировки критериев существования инвариантной меры в терминах различных характеристик группы.

2.1 Исходный критерий существования инвариантной меры в терминах топологической характеристики.

Очевидно, что существование инвариантной меры эквивалентно условию не пустоты носителя такой меры. На этом пути, для произвольной группы гомеоморфизмов прямой будет сформулирован критерий существования инвариантной меры в терминах топологической характеристики $Fix\, G^S$.

Теорема 6 (BEKL(1993)[21]). *Пусть $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{X})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) существует борелевская (вероятностная, в случае $\mathbb{X} = \mathbb{S}^1$) мера μ, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G;

2) множество $Fix\ G^S$ не пусто.$\blacksquare$

Непустота замкнутого инвариантное множество $Fix\ G^S$ и является топологическим критерием не пустоты носителя меры. Критерий в теореме Plante хоть и формулируется в терминах асимптотических свойств орбиты, в действительности характеризует условие не пустоты носителя инвариантной меры.

Для групп гомеоморфизмов окружности критерий существования инвариантной меры может быть дополнен ее формулировкой в терминах гомоморфизмов. Хорошо известно, что для любого гомеоморфизма $g \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ окружности определен топологический инвариант, называемый *числом вращения* $\rho(g)$ гомеоморфизма. В таком случае, определено отображение $\rho : Homeo_+(\mathbb{S}^1) \mapsto \mathbb{S}^1$.

Теорема 7 (BEKL(1996)[12]). *Пусть $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{S}^1)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) существует вероятностная борелевская мера μ, инвариантная относительно группы G;

2) множество $Fix\ G^S$ не пусто;

3) отображение ρ является гомоморфизмом группы G.$\blacksquare$

Замечание 1. *В силу предложения 1 и теоремы 6, для группы $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$ из существования инвариантной меры следует, что минимальное множество не пусто.*$\blacksquare$

Замечание 2. *В силу теоремы 3, для группы $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{X})$ из существования непустого дискретного минимального множества следует существование борелевской меры μ, конечной на компактах и инвариантной относительно группы G.*$\blacksquare$

Замечание 3. *Пусть $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{X})$ и для группы G минимальное множество не пусто. Тогда для группы G выполняется очевидное включение $H_G \subseteq G^S$. Более того, для существования борелевской меры μ, конечной на компактах и инвариантной относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $H_G = G^S$.*$\blacksquare$

Топологическое условие $Fix\ G^S \neq \emptyset$ из теоремы 6, не дают никакой информации о группах не удовлетворяющих указанному критерию существования инвариантной меры. Этот недостаток может быть преодолен за счет переформулировки отмеченных критериев в виде альтернатив.

2.2 Критерий существования инвариантной меры в терминах комбинаторных характеристик.

Приведем признак существования инвариантной меры в терминах факторгруппы $G/ < G^S >$.

Теорема 8 (BEKL(1996)[22]). *Пусть $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{X})$. Если факторгруппа $G/ < G^S >$ не тривиальная, то существует мера μ, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G.*$\blacksquare$

В терминах комбинаторных характеристик сформулируем критерий существования инвариантной борелевской меры на окружности в виде строгой альтернативы, являющейся неулучшаемым усилением теоремы Боголюбова-Крылова-Дэйя о существовании инвариантной меры для аменабельной группы, действующей на окружности.

Теорема 9 (BEKL(2002)[20]). *Для группы $G \subseteq Homeo\ (\mathbb{S}^1)$ гомеоморфизмов окружности, либо факторгруппа G/H_G содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо существует вероятностная борелевская мера, инвариантная относительно группы G.*$\blacksquare$

Мы можем вместо сильной альтернативы из теоремы 9 дать формулировку слабой альтернативы, но при этом факторгруппу заменить самой исходной группой. Такая слабая альтернатива для группы гомеоморфизмов окружности представляет собой как признак существования инвариантной меры, так и признак существования свободной подгруппы с двумя образующими.

Следствие 1. *Для группы $G \subseteq Homeo\ (\mathbb{S}^1)$ гомеоморфизмов окружности, или группа G содержит свободную подгруппу с двумя образующими, или существует вероятностная борелевская мера, инвариантная относительно группы G.* ■

Солодовым была сформулирована следующая слабая альтернатива.

Теорема 10 (Солодов [23] (1984)). *Для группы $G \subseteq Homeo\ (\mathbb{S}^1)$, или группа G содержит свободную подгруппу с двумя образующими, или $Fix\ G^S \neq \emptyset$ и отображение ρ, задаваемое числом вращения, является гомоморфизмом группы G.*

Вопрос об эквивалентности двух условий, $Fix\ G^S \neq \emptyset$ и отображение ρ является гомоморфизмом, им не изучался. Точно также не было известно об эквивалентности условия $Fix\ G^S \neq \emptyset$ условию существования инвариантной меры. Так как по теореме 7 существование инвариантной меры эквивалентно условию $Fix\ G^S \neq \emptyset$, то альтернатива, сформулированная Солодовым, эквивалентна слабой альтернативе из следствия 1. Слабая альтернатива, в формулировке следствия 1, была независимо доказана Маргулисом [24](2000).

Приведем эквивалентную переформулировку теоремы 9, в которой все утверждения приводятся исключительно в терминах комбинаторных характеристик.

Теорема 11 (BEKL(2002)[20]). *Для группы $G \subseteq Homeo\ (\mathbb{S}^1)$ гомеоморфизмов окружности, либо факторгруппа G/H_G содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо является коммутативной.* ■

Для групп гомеоморфизмов окружности свойство факторгруппы G/H_G может быть использовано для их классификации. Возникает два непересекающихся класса. В одном классе группы с коммутативными факторгруппами G/H_G, в другом классе группы с факторгруппами G/H_G, содержащими свободные подгруппы с двумя образующими. К сожалению, данный подход не применим к изучению самой нормальной подгруппы H_G. Более детальное исследование нормальной подгруппы H_G приводит к изучении индуцированных групп гомеоморфизмов *прямой* (не окружности), а для них используемого свойства факторгруппы нет. Поэтому, задача выявления аналогичных свойств для групп гомеоморфизмов прямой является актуальной.

На этом пути, для групп гомеоморфизмов прямой $G \subseteq Homeo_+ (\mathbb{R})$ также удается в терминах характеристик факторгруппы G/H_G сформулировать критерий существования инвариантной меры. В отличие от критерия существования инвариантной меры для группы гомеоморфизмов окружности, условия на факторгруппу G/H_G должны быть более жесткими.

Теорема 12 (BEKL(2002)[20]). *Для группы $G \subseteq Homeo_+ (\mathbb{R})$ гомеоморфизмов прямой с не пустым минимальным множеством, либо факторгруппа G/H_G содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, либо существует борелевская мера, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G.* ■

Мы можем вместо сильной альтернативы из теоремы 12 дать формулировку слабой альтернативы, но при этом факторгруппу заменить самой исходной группой. Такая слабая альтернатива для группы гомеоморфизмов прямой представляет собой как признак существования инвариантной меры, так и признак существования свободной подполугруппы с двумя образующими.

Следствие 2. *Для группы $G \subseteq Homeo_+ (\mathbb{R})$ гомеоморфизмов прямой с не пустым минимальным множеством, или группа G содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, или существует борелевская мера, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G.*■

Приведем эквивалентную переформулировку теоремы 12, в которой все утверждения приводятся исключительно в терминах свойств факторгруппы G/H_G.

Теорема 13 (BEKL(2002)[20]). *Для группы гомеоморфизмов прямой $G \subseteq Homeo_+ (\mathbb{R})$ с не пустым минимальным множеством, либо факторгруппа G/H_G содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, либо является коммутативной.*■

2.3 Критерий существования инвариантной меры в терминах свойств конечно порожденных подгрупп.

В работе Plante был сформулирован критерий существования инвариантной меры, но только лишь для конечно порожденной группы гомеоморфизмов прямой (окружности). Такой критерий был сформулирован в терминах роста элементов орбиты и он не может быть распространен на группы не являющиеся конечно порожденными. Вместе с тем, оставался открытым вопрос о существовании инвариантной меры для групп, имеющих инвариантную меру для каждой конечно порожденной подгруппы. т.е удовлетворяющих критерию Plante. Очевидно, что для исходной группы выполнение критерия Plante для каждой конечно порожденной подгруппы носит локальный характер. Мы знаем, что для конечно порожденных групп гомеоморфизмов прямой, а также групп с инвариантной мерой, минимальное множество не пусто. Однако, примеры показывают, что для групп, конечно порожденные подгруппы которых удовлетворяют критерию Plante, даже условие непустоты минимального множества исходной группы оказывается недостаточным для гарантирования существования инвариантной меры. Требуется условие более сильное.

Теорема 14 (BEKL(2014)[25])**.** *Пусть $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{X})$. Для существования борелевской меры, конечной на компактах и инвариантной относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы нашелся компакт I, для всякой конечно порожденной подгруппы $\Gamma \subseteq G$ существовала инвариантная мера и выполнялось условие*

$$Fix\,\Gamma^S \cap I \neq \emptyset. \tag{4}$$

■

Условие (4), гарантирующее существование инвариантной меры, является условием нелокального типа. Очевидно, что в случае окружности $\mathbb{X} = \mathbb{S}^1$ условие (4) автоматически выполняется. Для групп $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$, из более узкого класса, условие (4) может быть опущено.

Теорема 15 (BEKL(2014)[25])**.** *Пусть $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$ и имеется некоторая конечно порожденная подгруппа $Q \subseteq G$ с не дискретным минимальным множеством. Для существования борелевской меры, конечной на компактах и инвариантной относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы для всякой конечно порожденной подгруппы $\Gamma \subseteq G$ существовала инвариантная мера.* ■

2.4 Критерий существования инвариантной меры в терминах коммутанта.

Хорошо известно, что при изучении структуры групп особое место принадлежит коммутанту группы. Сформулируем критерий существования инвариантной меры в терминах коммутанта $[G, G]$. Напомним, что для группы с инвариантной мерой минимальное множество не пусто.

Теорема 16 (BEKL(2014)[26])**.** *Пусть $G \subseteq Homeo_+\ (\mathbb{R})$ и минимальное множество группы G непустое. Тогда для существования инвариантной борелевской меры, конечной на компактах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$[G, G] \subseteq H_G. \tag{5}$$

■

2.5 Критерий существования инвариантной меры в терминах полусопряженности.

Критерии существования метрических инвариантов могут быть переформулированы в терминах полусопряженности, определение которой приводится ниже.

Определение 5. *Пусть заданы группы G, ${}_*G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$. Группа G называется полусопряженной группе ${}_*G$, если существует сохраняющее ориентацию (монотонно возрастающее) отображение $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ с образом, состоящим из более чем одной точки, и эпиморфизм $\eta^\sharp : G \longrightarrow {}_*G$ такие, что для любого $q \in G$ диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "{}_*g=\eta^\sharp(g)"] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R} \arrow[u, "\eta"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна, т.е. $\eta^\sharp(g)\eta = \eta g$. ■

Если в определении полусопряженности отображение η непрерывно, то говорят о топологической полусопряженности. Если отображение η является гомеоморфизмом, и как следствие эпиморфизм $\eta^\sharp$ является изоморфизмом, то группа G называется топологически сопряженной группе ${}_*G$ или просто *сопряженной.*

Определение 6. *Пусть заданы группы* G, ${}_*G \subseteq Homeo_+\ (\mathbb{S}^1)$. *Группа* G *называется полусопряженной группе* ${}_*G$, *если:*

1) *группа* $\hat{G} \subseteq Homeo\ (\mathbb{R})$ *будет полусопряжена группе* ${}_*\hat{G} \subseteq Homeo\ (\mathbb{R})$, *где* $\hat{G}$ *и* ${}_*\hat{G}$ *группы накрытий для гомеоморфизмов окружности из* G *и* ${}_*G$, *соответственно;*

2) *отображение* η *из определения 5 коммутирует с гомеоморфизмом* $\overline{g}(t) = t + 1$, *т.е.* $\eta\overline{g} = \overline{g}\eta$. ■

Замечание 4. *Эпиморфизм* $\eta^\sharp : \hat{G} \longrightarrow {}_*\hat{G}$, *который подразумевается в определении полусопряженности для группы гомеоморфизмов окружности (определение 6), естественным образом индуцирует эпиморфизм* $G \longrightarrow {}_*G$, *который мы будем обозначать тем же знаком* $\eta^\sharp$.

Сформулируем критерий существования инвариантной меры в терминах полусопряженности.

Теорема 17 (BEKL(1996)[27])**.** *Пусть* $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *существует борелевская мера* μ, *конечная на компактах и инвариантная относительно группы* G;

(2) *группа* G *полусопряжена некоторой группе* ${}_*G \subseteq Homeo_+(\mathbb{R})$ *сдвигов на прямой.* ■

Приведем аналог теоремы 17 для групп, действующих на окружности.

Теорема 18 (BEKL(1996)[27])**.** *Пусть* $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{S}^1)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *существует вероятностная мера* μ, *инвариантная относительно группы* G;

(2) *группа* G *полусопряжена некоторой группе* ${}_*G \subseteq Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ *вращений окружности.* ■

Опишем связь между отображением η и инвариантной мерой μ из теоремы 17.

Замечание 5. *В теореме 17 мера μ и соответствующее отображение η из определения полусопряженности связаны соотношением*

$$\eta(t) = \tilde{\mu}([\bar{t}, t)), \qquad \tilde{\mu}([\bar{t}, t)) = \begin{cases} +\mu([\bar{t}, t)), & \text{если } t \geq \bar{t} \\ -\mu((t, \bar{t}]), & \text{если } t < \bar{t}, \end{cases}$$

где $\bar{t} \in \mathbb{R}$ — некоторая заданная точка. Из непрерывности отображения η следует непрерывность меры μ и наоборот. В случае недискретного минимального множества отображение η непрерывное и мы имеем топологическую полусопряженность. ■

Замечание 6. *В теоремах 17 и 18 подгруппа H_G (см. замечание 3 : $H_G = G^S$) совпадает с ядром гомоморфизма $\eta^\sharp$, т.е. $ker\ \eta^\sharp = H_G$, а факторгруппа G/H_G изоморфна группе сдвигов (вращений) ${}_*G$, т.е. ${}_*G \simeq G/H_G$. Более того, минимальные множества группы G дискретные тогда и только тогда, когда факторгруппа G/H_G циклическая в случае группы гомеоморфизмов прямой и факторгруппа G/H_G циклическая группа конечного порядка в случае группы гомеоморфизмов окружности.*■

Замечание 7. *В случае окружности образ гомоморфизма $\eta^\sharp$ может быть описан с помощью числа вращения $\rho(g)$ гомеоморфизма: для любого $g \in G$ имеет место равенство $\eta^\sharp(g) = \rho(g)$.*■

Для групп гомеоморфизмов прямой свойства факторгруппы G/H_G из теоремы 13 могут быть положены в основу классификационной схемы. В силу эквивалентности теорем 12 и 13, множество всех групп с непустым минимальным множеством не только разделяется на два класса, класс групп с инвариантной мерой и класс групп без инвариантной меры, но и содержит дополнительную информацию о факторгруппе G/H_G. Вместе с тем, такая схема обладает рядом недостатков. Факторгруппа G/H_G, содержащая свободную подполугруппу с двумя образующими, может быть как элементарной, например, разрешимой аффинной группой $G =< t + 1, 2t >$, так и группой, содержащей свободную подгруппу с двумя образующими. Не смотря на эти недостатки, условие непустоты минимального множества и характеристики факторгруппы G/H_G (теоремы 12 и 13), множество всех групп гомеоморфизмов прямой разбивают на три класса: *группы с инвариантной мерой; группы с непустым минимальным множеством и без инвариантной меры; группы с пустым минимальным множеством.* В связи с полученным разбиением возникает задача более детального описания класса групп с непустым минимальным множеством и без инвариантной меры и класса групп с пустым минимальным множеством. В частности, для класса групп с непустым минимальным множеством и без инвариантной меры такое более детальное описание связано с более общим метрическим инвариантом в виде проективно инвариантной меры. Более подробно эти вопросы обсуждаются в обзоре [9].

2.4. Носитель инвариантной меры. Эргодические свойства инвариантной меры

Для изучения свойств инвариантной меры следует описать ее носитель. Этому будут посвящены результаты данного раздела. Также будут сформулированы результаты о строгой эргодичности.

Для группы G со свойством $Fix\ G^s \neq \emptyset$, т.е. группы с инвариантной мерой, минимальные множества могут быть конструктивно описаны.

Если $A \subseteq \mathbb{X}$ — некоторое подмножество, то $P(A)$ будет обозначать множество предельных точек подмножества A. Если A пустое подмножество, то по определению положим $P(A) = \emptyset$.

Теорема 19 (BEKL(1996)[27]). *Пусть задана группа $G \subseteq Homeo_+(\mathbb{X})$, для которой $Fix\ G^s \neq \emptyset$. Тогда:*

1) *для всякого $t \in Fix\ G^s$ множество $P(G(t))$ не зависит от точки t и обозначается $\mathbb{P}(G)$;*

2) *справедливо включение $\mathbb{P}(G) \subseteq Fix\ G^s$;*

3) *либо $\mathbb{P}(G) = \mathbb{X}$, либо $\mathbb{P}(G)$ — совершенное нигде не плотное подмножество $\mathbb{X}$, либо $\mathbb{P}(G) = \emptyset$;*

4) *если $\mathbb{P}(G) \neq \emptyset$, то группа G имеет единственное не дискретное минимальное множество $E(G)$ и $\mathbb{P}(G) = E(G)$;*

5) *если $\mathbb{P}(G) = \emptyset$, то все минимальные множества дискретные, принадлежат множеству $Fix\ G^s$, а само множество $Fix\ G^s$ состоит из объединения минимальных множеств $E_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{A}$, т.е. $Fix\ G^S = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} E_\alpha$.* ■

Теорема 20 (BEKL(1996)[27]). *Пусть $G \subseteq Homeo_{+}(\mathbb{X})$ и существует борелевская (вероятностная, в случае $\mathbb{X} = S^1$) мера μ, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G. Тогда:*

1) *для носителя меры μ имеет место включение $supp\, \mu \subseteq Fix\ G^s$;*

2) *если $\mathbb{P}(G) \neq \emptyset$, то $supp\, \mu = \mathbb{P}(G) = E(G)$. Более того, в этом случае мера μ непрерывная;*

3) *если $\mathbb{P}(G) = \emptyset$, то $supp\ \mu$ состоит из некоторого объединения дискретных минимальных множеств, т.е. $supp\ \mu = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}} E_{\alpha}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.*

■

Определение 7. *Группа гомеоморфизмов $G \subseteq Homeo_{+}\ (\mathbb{X})$ называется строго эргодичной, если существует борелевская (вероятностная, в случае $\mathbb{X} = \mathbb{S}^1$) мера, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G, и любая пара $\mu_1,\ \mu_2$ борелевских (вероятностных) мер, конечных на компактах и инвариантных относительно группы G, связаны соотношением $\mu_1 = \lambda \mu_2,\ \lambda \subseteq \mathbb{R}^{+}$ $(\mu_1 = \mu_2)$.* ■

Сформулируем теорему о строгой эргодичности группы.

Теорема 21 (BEKL(1996)[27]). *Пусть $G \subseteq Homeo_{+}(\mathbb{X})$ и существует борелевская (вероятностная, в случае $\mathbb{X} = \mathbb{S}^1$) мера, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G. Группа G является строго эргодичной тогда и только тогда, когда выполняется одно из взаимно исключающих условий:*

1) *$\mathbb{P}(G) \neq \emptyset$;*

2) *$\mathbb{P}(G) = \emptyset$, а множество $Fix\ G^s$ состоит из одного не пустого дискретного минимального множества.*

■

Несколько замечаний по истории вопроса. Вопрос существования инвариантной меры для группы гомеоморфизмов локально компактного пространства является центральным в теории Боголюбова-Крылова. По истории этого вопроса и важнейшим результатам существует исчерпывающий обзор Д.В.Аносова [28] с полным списком литературы. Несмотря на наличие критерия существования инвариантной меры для произвольной группы гомеоморфизмов прямой, сформулированной в теореме 6, весьма важны переформулировки критерия существования инвариантной меры в терминах также и других свойств группы. Некоторые такие переформулировки представлены были выше. Ряд других вопросов, связанных как с переформулировками критерия существования инвариантной меры в терминах иных свойств группы гомеоморфизмов прямой (окружности), так и с эргодическими свойствами такой инвариантной меры, приводятся в обзоре автора [8].

3 Группы диффеоморфизмов прямой и окружности.

Определим один важный класс конечно порожденных групп диффеоморфизмов прямой и окружности, приведем критерий почти нильпотентности для групп из такого класса, а также сформулируем теоремы о структуре таких групп. В случае окружности ранее было установлено, что в классе конечно порожденных групп диффеоморфизмов гладкости два выделенный класс групп является "массивным" подмножеством. Обсуждаются вопросы о типичности как свойств минимального множества, так и факта существования инвариантной меры.

Определение 8. *Диффеоморфизмы $g_1, g_2 \in Diff^1(\mathbb{X})$, $\quad g_1 \neq g_2$ называются взаимно трансверсальными, если из условия $g_1(t) = g_2(t)$, $t \in \mathbb{X}$ следует, что $\dot{g}_1(t) \neq \dot{g}_2(t)$.*■

Важное замечание состоит в том, что для группы $G =< g_1, ..., g_s >$ с образующими $g_j \in Diff^1(\mathbb{X})$, $\quad j = 1, ..., s$ и взаимно трансверсальными элементами, для любого $t \in \mathbb{X}$, за исключением счетного множества точек, группа G действует свободно на орбите $G(t)$.

3.1 Критерий почти нильпотентности для групп диффеоморфизмов окружности с взаимно трансверсальными элементами. Структурная теорема для таких групп и типичные свойства.

Важно знать, как много групп со свойством взаимной трансверсальности элементов? Ответ на такой вопрос дается в следующей теореме.

Теорема 22 (BEKL(2012)[29]). *Множество свободных групп диффеоморфизмов $G =< g_1, ..., g_s >$, $\quad g_j \in Diff^2(\mathbb{S}^1)$, $\quad j = 1, ..., s$ окружности с фиксированным числом s образующих, для которых элементы взаимно трансверсальны, в метрике пространства $\otimes_s Diff^2(\mathbb{S}^1)$ является счетным пересечением открытых всюду плотных подмножеств (массивным множеством).*■

Ранее, в теореме 11 была установлена строгая альтернатива для факторгруппы G/H_G. Можно ли для конечно порожденной группы диффеоморфизмов гладкости два с взаимно трансверсальными элементами получить дополнительные сведения о свойствах исходной группы G? Положительный ответ на поставленный вопрос дается следующей теоремой.

Теорема 23 (BEKL(2012)[30]). *Пусть группа $G =< g_1, ..., g_s >$ является группой диффеоморфизмов с элементами из $Diff^1(\mathbb{S}^1)$, которые являются взаимно трансверсальными. Тогда, либо факторгруппа G/H_G содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо группа G является почти нильпотентной.*■

В случае недискретного минимального множества формулировка альтернативы может быть усилена.

Следствие 3. *Пусть группа $G =< g_1, ..., g_s >$ является группой диффеоморфизмов с элементами из $Diff^1(\mathbb{S}^1)$, которые являются взаимно трансверсальными, а минимальное множество группы G не дискретное. Тогда, либо факторгруппа G/H_G содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо группа G является коммутативной.*■

В действительности, теорему 23 мы можем переформулировать в терминах исходной группы G, без использования подгруппы H_G и соответствующей факторгруппы G/H_G. Такая переформулировка устанавливает критерий почти нильпотентности для конечно порожденных групп $G \subseteq Diff^1(\mathbb{S}^1)$ диффеоморфизмов окружности с взаимно трансверсальными элементами.

Теорема 24 (BEKL(2015)). *Пусть группа $G =< g_1, ..., g_s >$ является группой диффеоморфизмов с элементами из $Diff^1(\mathbb{S}^1)$, которые являются взаимно трансверсальными. Тогда, либо группа G содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо группа G является почти нильпотентной.*■

Теперь мы можем для конечно порожденных групп $G \subseteq Diff^1(\mathbb{S}^1)$ диффеоморфизмов окружности с взаимно трансверсальными элементами сформулировать теорему о структуре таких групп.

Теорема 25 (BEKL(2015))**.** *Пусть группа $G =< g_1, ..., g_s >$ является группой диффеоморфизмов с элементами из $Diff^1(\mathbb{S}^1)$, которые являются взаимно трансверсальными. Тогда для группы G справедливо одно из перечисленных взаимоисключающих утверждений.*

1) *Для группы G не существует инвариантной меры и группа G содержит свободную подгруппу с двумя образующими. Минимальное множество группы G не дискретное и $H_G =< e >$.*

2) *Для группы G существует инвариантная мера и G коммутативная нециклическая группа. Группа G топологически сопряжена группе вращений, а минимальное множество группы G не дискретное и $H_G =< e >$.*

3) *Для группы G существует инвариантная мера и группа G почти нильпотентная. При этом, факторгруппа G/H_G циклическая группа конечного порядка, а подгруппа H_G коммутативная. Группа G полусопряжена циклической группе вращений конечного порядка, а минимальные множества группы G дискретные.*

■

Теперь мы можем привести некоторые рассуждения о типичности ряда свойств для групп диффеоморфизмов окружности. В силу теорем 22 и 25, в пространстве групп диффеоморфизмов

$$G =< g_1, ..., g_s >, \quad g_i \in Diff^2(\mathbb{S}^1), \quad i = 1, ..., s,$$

с фиксированным количеством $s \geq 2$ образующих, для групп из "массивного" подмножества не существует инвариантной меры (существование инвариантной меры не является типичным свойством), а минимальное множество не дискретное и совпадает со всей окружностью $\mathbb{S}^1$ (совпадение минимального множества со всей окружностью является типичным свойством).

С другой стороны, для групп с одной образующей ($s = 1$) множество

$$\{G =< q >: \ q \in Diff^2(\mathbb{S}^1); \ \rho(q) \in \mathbb{Q}; \ \textit{элементы циклической группы} \\ < q > \ \textit{взаимно трансверсальны}; \ G^S \neq < e >\},$$

в метрике пространства $Diff^2(\mathbb{S}^1)$ является открытым всюду плотным подмножеством. Такие диффеоморфизмы называются диффеоморфизмами с невырожденными циклами (см.[31], глава 3, параграф 11, раздел Ж). Множество таких групп с одной образующей содержится в "массивном" подмножестве из теоремы 22. Для таких циклических групп существует инвариантная мера (существование инвариантной меры является типичным свойством), а минимальные множества дискретные (дискретность минимального множества является типичным свойством).

Как видим, для групп диффеоморфизмов гладкости $C^{(2)}$ к типичным свойствам относятся как существование инвариантной меры (для групп с одной образующей), так и ее отсутствие (для групп с образующими не менее двух). Точно также, к типичным свойствам относится как дискретность минимального множества (для групп с одной образующей), так и его недискретность (для групп с образующими не менее двух).

Для завершения исследований о типичных свойствах конечно порожденных групп $G \subseteq Diff^1(\mathbb{S}^1)$ диффеоморфизмов прямой следует получить результат в виде аналога теоремы 22.

3.2 Критерий почти нильпотентности для групп диффеоморфизмов прямой с взаимно трансверсальными элементами. Структурная теорема для таких групп.

Для конечно порожденных групп диффеоморфизмов прямой с взаимно трансверсальными элементами мы также можем сформулировать структурную теорему. Ранее, для групп гомеоморфизмов прямой в теореме 13 была установлена строгая альтернатива для факторгруппы G/H_G. Можно ли для конечно порожденной группы диффеоморфизмов прямой с взаимно трансверсальными элементами получить дополнительные сведения о свойствах исходной группы G? Положительный ответ на поставленный вопрос дается следующей теоремой также в виде строгой альтернативы. Такая альтернатива является аналогом следствия 3, полученного для конечно порожденной группы диффеоморфизмов окружности с взаимно трансверсальными элементами и не дискретным минимальным множеством.

Теорема 26 (BEKL(2015)). *Пусть группа $G =< g_1, ..., g_s >$ является группой диффеоморфизмов с элементами из $Diff^1(\mathbb{R})$, которые являются взаимно трансверсальными, а минимальное множество группы G не дискретное. Тогда, либо факторгруппа G/H_G содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, либо группа G является коммутативной.*■

Мы можем дать формулировку приведенной сильной альтернативы в терминах исходной группы G, без использования подгруппы H_G и соответствующей факторгруппы G/H_G, а также дополнительного условия о не дискретности минимального множества группы G. Такая переформулировка устанавливает критерий почти нильпотентности для конечно порожденной группы $G \subseteq Diff^1(\mathbb{R})$ диффеоморфизмов прямой с взаимно трансверсальными элементами.

Теорема 27 (BEKL(2015)). *Пусть группа $G =< g_1, ..., g_s >$ является группой диффеоморфизмов с элементами из $Diff^1(\mathbb{R})$, которые являются взаимно трансверсальными. Тогда, либо группа G содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, либо группа G является почти нильпотентной.*■

Для конечно порожденной группы $G \subseteq Diff_+^{1+\alpha}([0,1])$, $\alpha > 0$ в работе [5] также изучался критерий почти нильпотентности. Заметим, что группа $Homeo_+([0,1])$ гомеоморфизмов интервала $[0,1]$ топологически сопряжена группе $Homeo_+(\mathbb{R})$ гомеоморфизмов прямой. Для этого следует задать гомеоморфизм $\eta : (0,1) \mapsto \mathbb{R}$. Более того, отображение η можно определить как диффеоморфизм класса C^∞. Тогда получим, что

$$Homeo_+(\mathbb{R}) = \eta \circ Homeo_+([0,1]) \circ \eta^{-1}.$$

Очевидно, группа $\eta \circ Diff^1_+([0,1]) \circ \eta^{-1}$ будет подгруппой группы $Diff^1_+(\mathbb{R})$, имеющей ряд дополнительных свойств. Эти дополнительные свойства и обеспечивают выполнимость приводимого критерия.

Напомним, что $g \in Diff^{1+\alpha}_+([0,1]),\ \ \alpha > 0$, если существует константа $C_g > 0$, такая что для всех $t_1, t_1 \in [0,1]$ для производной справедлива оценка $|g'(t_2) - g'(t_1)| \leq C_g |t_2 - t_1|^\alpha$.

Теорема 28 (Navas (2007)[5])**.** *Для любого заданного $\alpha > 0$ каждая конечно порожденная подгруппа группы $Diff^{1+\alpha}_+([0,1])$ является почти нильпотентной тогда и только тогда, когда она не содержит свободной подполугруппы с двумя образующими.* ■

Ключевым фактом при доказательстве теоремы Navas является установление аналога теоремы Данжуа об отсутствии минимального множества, гомеоморфного канторовому множеству, для конечно порожденной группы диффеоморфизмов $G \subseteq Diff^{1+\alpha}_+([0,1]),\ \ \alpha > 0$.

Очевидно, что для групп с не дискретным минимальным множеством при отсутствии минимального множества, гомеоморфного канторовому множеству, минимальное множество совпадает со всем пространством $\mathbb{X}$ и поэтому выполняется соотношение $H_G =< e >$. Ключевым фактом при доказательстве теоремы 27 является тривиальность подгруппы $H_G =< e >$ для конечно порожденной группы диффеоморфизмов $G \subseteq Diff^1(\mathbb{R})$ с взаимно трансверсальными элементами и недискретным минимальным множеством (в частности, с минимальным множеством, гомеоморфным канторовому множеству).

Очевидно, что для групп с недискретным минимальным множеством условие $H_G =< e >$ более слабое, чем условие отсутствия минимального множества, изоморфного канторовому множеству. Поэтому, при изучении групп диффеоморфизмов прямой (окружности) более сильное условие об отсутствии минимального множества, гомеоморфного канторовому множеству, следует заметить более слабым условием $H_G =< e >$, что расширяет класс охватываемых групп.

Напомним, что для конечно порожденной группы, содержащей свободную подполугруппу с двумя образующими, рост экспоненциальный. С другой стороны, по теореме Громова [33] почти нильпотентная группа и только она имеет полиномиальный рост. Поэтому, в силу теорем 24, 27, 28, рассматриваемые там группы диффеоморфизмов не могут быть группами промежуточного роста. Вместе с тем, Navas [6] показал, что группа промежуточного роста, ассоциированная с группой Григорчука [7], может быть реализована как подгруппа группы $Diff_+^1([0,1])$.

Теперь мы можем для конечно порожденной группы $G \subseteq Diff^1(\mathbb{R})$ диффеоморфизмов прямой с взаимно трансверсальными элементами сформулировать теорему о структуре такой группы.

Теорема 29 (BEKL(2015))**.** *Пусть группа* $G =< g_1, ..., g_s >$ *является группой диффеоморфизмов с элементами из* $Diff^1(\mathbb{R})$*, которые являются взаимно трансверсальными. Тогда для группы* G *справедливо одно из перечисленных взаимоисключающих утверждений.*

1) Для группы G *не существует инвариантной меры и группа* G *содержит свободную подполудгруппу с двумя образующими. Минимальное множество группы* G *недискретное и* $H_G =< e >$*.*

2) Для группы G *существует инвариантная мера и* G *коммутативная нециклическая группа. Группа* G *топологически полусопряжена группе сдвигов на прямой. Минимальное множество группы* G *недискретное и* $H_G =< e >$*.*

3) Для группы G *существует инвариантная мера и группа* G *почти нильпотентная. При том, факторгруппа* G/H_G *циклическая бесконечная группа, а подгруппа* H_G *коммутативная. Группа* G *полусопряжена бесконечной циклической группе сдвигов на прямой, а минимальные множества группы* G *дискретные.*

4) Для группы G *существует инвариантная мера и группа* G *содержит свободную подполудгруппу с двумя образующими. При этом, факторгруппа* G/H_G *циклическая бесконечная группа, подгруппа* $H_G \neq < e >$ *коммутативная и, соответственно, группа* G *разрешимая. Группа* G *полусопряжена бесконечной циклической группе сдвигов на прямой, а минимальные множества группы* G *дискретные.*

Мы установили, что в случае прямой также имеет место структурная теорема. Условие отсутствия "свободной подгруппы с двумя образующими"в случае окружности, заменяется более сильным условием отсутствия "свободной подполугруппы с двумя образующими". Добавляется дополнительный пункт 4). Он является следствием того, что для группы G, действующей на прямой с дискретными минимальными множествами, отсутствие свободной подполугруппы с двумя образующими для факторгруппы G/H_G не гарантирует отсутствия свободной подполугруппы с двумя образующими для исходной группы G.

Для завершения исследований о типичных свойствах конечно порожденных групп $G \subseteq Diff^1(\mathbb{R})$ диффеоморфизмов прямой следует получить результат в виде аналога теоремы 22.

Список литературы

[1] Крылов М.М., Боголюбов М.М. Загальна теорія міри та ii застосування до вівчения динамичніх систем нелінійній механіці // Збірник праць з нелінійной механіки. Записки кафедри математичноі фізики Інституту будівельноi механіки АН УРСР. (1937), Т.3, С.55-112.

[2] Day M. Amenable Semigroups// Ill. J. Math.(1957), № 1, С.509-544

[3] Plante J.F. Foliations with measure preserving holonomy // Ann. Math. (1975), V. 102, P. 327-361.

[4] Gromov M. Group of polinomial growth and expending maps// Publ.Math. de I'IHES (1981), vol.53, p.53-73.

[5] Navas A. Group of Circle Diffeomorphisms// arXiv : math/0607481V3 [math. DS] (2009), P.212.

[6] Deroin B., Kleptsyn V., Navas A. Sur la dynamique unidimensionnelle en regularite intermediaire.// Acta Math. (2007) V.199, P.199-262.

[7] Grigorchuk R.I., Maki, A. J. On a group of intermediate growth that acts on a line by homeomorphisms.// Mat. Zametki (1993), V.53, P. 46-63. Translation to english in Math. Notes (1993), V.53, P.146-157.

[8] Бекларян Л.А. Группы гомеоморфизмов прямой и окружности. Топологические характеристики и метрические инварианты// Успехи математических наук (2004), Т.59, № 4, С.3-68.

[9] Бекларян Л.А. Группы гомеоморфизмов прямой и окружности. Метрические инварианты и вопросы классификации//Успехи Математических Наук (2015), Т.70, № 2, С.148-184.

[10] Grigorchuk R.I., Ceccherini–Silberstein T., P. de la Harpe. Amenability and Paradoxical Decompositions for Pseudogroups and for Discrete Metric Spaces// Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, (1999), V.224, P. 57–97.

[11] Адян С.И. Новые оценки периодов бесконечных бернсайдовых групп// Труды института математики им. В.А.Стеклова, (2015), Т.289, С.41-82.

[12] Бекларян Л.А. К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. II.Проективно-инвариантные меры.//Математический сборник (1996), Т.187, № 4, С.3-28.

[13] Plante J.F. Solvable groups acting on the line// Transl. of the Amer. Math. Soc. (1983), V. 278, P. 401-414.

[14] Salhi E. Sur les ensembles locaux// C.R.A.S. Paris. (1982), V. 295. Ser. I. № 12. P. 691–694.

[15] Salhi E. Sur une theorie de structure de feuilletages de codimention 1// C.R.A.S. Paris. (1985), V. 300. Ser. I. № 18. P. 635–638.

[16] Salhi E. Niveau de feuilles// C.R.A.S. Paris. (1985), V. 301. Ser. I. № 5. P. 219–222.

[17] Бекларян Л.А. К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. III. ω-проективно-инвариантные меры.//Математический сборник (1999), Т.190, № 4, С.43-62.

[18] Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.

[19] Бекларян Л.А. О критерии топологической сопряженности квазисимметрической группы группе аффинных преобразований $\mathbb{R}$.// Математический сборник (2000), Т.191, № 6, С.31—42.

[20] Бекларян Л.А. Об аналогах альтернативы Титса для групп гомеоморфизмов окружности и прямой// Математические заметки (2002), Т.71, № 3, С.334–347.

[21] Бекларян Л.А. Инвариантные и проективно инвариантные меры для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$//ДАН (1993), Т.332, № 6, С.679-681.

[22] Бекларян Л.А. Критерий существования проективно инвариантной меры для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, связанный со структурой множества неподвижных точек.// Успехи математических наук. (1996), Т. 51, № 3, С. 179-180.

[23] Солодов В.В. Гомеоморфизмы окружности и слоения// Изв. АН СССР. Сер. матем. (1984), Т.48. № 3. С. 599–613.

[24] Margulis G.. Free subgroups of the homeomorphism group of the circle// C.R.Acad.Sci. Paris, V.331, Serie I, P.669—674, 2000.

[25] Бекларян Л.А. Критерии существования инвариантной меры для групп гомеоморфизмов прямой.//Математические заметки (2014), Т.95. № 3, С.335-339.

[26] Бекларян Л.А. Группы гомеоморфизмов прямой. Критерии существования инвариантной и проективно инвариантной мер в терминах коммутанта. //Математический Сборник (2014), Т.205, № 12, С.3-24.

[27] Бекларян Л.А. К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. I. Инвариантные меры.// Математический сборник (1996), т.187, № 3, С.23-54.

[28] Аносов Д.В. О вкладе Н.Н.Боголюбова в теорию динамических систем //УМН (1994). Т. 49. № 5. С. 5-20.

[29] Бекларян Л.А. О массивных подмножествах в пространстве конечно порожденных групп диффеоморфизмов окружности //Математические Заметки (2012), Т.92, № 6, С.825-833.

[30] Beklaryan L.A. Group Specialities in the Problem of the Maximum Principle for Systems with Deviating Argument// J. Dynamical and Control Systems. (2012), V.18, № 1, P.21-34.

[31] Арнольд В.И.Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[32] Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973.

[33] Gromov M. Group of polinomial growth and expending maps// Publ.Math. de I'IHES (1981), vol.53, p.53-73.

[34] Rosenblatt J. Invariant measures and growth conditions// Trans. of the AMS (1974), vol.197, p.33-53

Центральный Экономико-Математический Институт РАН
E-mail beklar@cemi.rssi.ru