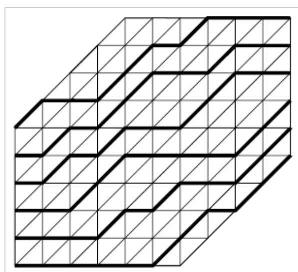
Ортогональные полиномы и непересекающиеся пути.

Листок 2.

Повторение. Шестиугольник нарисован на клетчатой бумаге. На рисунке, приведённом ниже, изображены несколько непересекающихся путей, начинающихся в каждом узле крайней левой стороны шестиугольника, и заканчивающихся в каждом узле крайней правой стороны. Докажите, что существует ровно $det_{i,j=1,\dots,N}[C_T^{S+i-j}]$ различных наборов непересеающихся путей (параметры S и T определяются размерами шестиугольника; их определение и формальная формулировка задачи приведены под рисунком).

*выражением $det_{i,j=1,\dots,N}[C_T^{S+i-j}]$ обозначается определитель матрицы, на пересечении i-ой строки и j-ого столбца которой стоит биномиальный коэффициент C_T^{S+i-j}.



Рассмотрим целочисленную решетку $\mathbb{Z}^2$ на плоскости (t, x) и два набора точек на ней, $X_i = (0, i-1)$ и $Y_i = (T, S+i-1)$, где индекс i меняется от 1 до некоторого фиксированного N, а T и S - некоторые фиксированные параметры. Рассмотрим все наборы из N непересекающихся путей, проходящих по узлам решетки, при этом i-й путь соединяет X_i и Y_i. Пути являются ломаными, у которых каждое звено есть отрезок с левым концом $(t, x) \in \mathbb{Z}^2$ и правым концом $(t+1, x)$ или $(t+1, x+1)$. Иными словами, пути состоят из горизонтальных отрезков и отрезков, наклоненных под углом 45 градусов, причем при движении вдоль пути t-координата возрастает, а x-координата не убывает. Докажите, что существует ровно $det_{i,j=1,\dots,N}[C_T^{S+i-j}]$ различных наборов непересеающихся путей.

1) Вертикальная срезка. Рассмотрим теперь произвольный момент времени t и набор точек $Z_1, \dots, Z_N$ с координатами (t, z_i) соответственно (будем считать, что z_i упорядочены по возрастанию). Определена вероятность того, что наш набор путей проходит через точки Z_i, обозначим её $P_t(z_1, \dots, z_N)$ (все наборы путей равновероятны). Найдём эту вероятность.

1a) Формула Карлина-МакГрегора. Количество наборов непересекающихся путей, соединяющих точки (t_1, a_i) и (t_2, b_i) , где i меняется от 1 до N, равно $\mathrm{d}et_{i,j=1,...,N}C_{(t_2-t_1)}^{(b_i-a_j)}$.

1b) Воспользовавшись пунктом *1*a покажите, что
$P_t(z_1, ..., z_N) = \frac{\det_{i,j=1,...,n}[C_t^{z_i+1-j}]\det_{i,j=1,...,n}[C_{T-t}^{S+i-1-z_j}]}{\det_{i,j=1,...,n}[C_{S+i-j}^T]}$.

1c) Докажите, что выражение, приведённое в пункте *1*b равно
$\Pi_{N\geq j>i\geq 1}(z_i - z_j)^2\Pi_{i=1}^N\frac{1}{z_i!(t-z_i-N-1)!(S-z_i+N-1)!(T-t-S+z_i)!}$
$*\Pi_{i=1}^N\frac{(t+1)_{i-1}(T-t+1)_{i-1}(S-i+N)!(T-S+i-1)!}{(T+1)_{i-1}(i-1)!} * (\frac{t!(T-t)!}{T!})^N$,
где $(a)_i = a(a+1)\dots(a+i-1)$.

1d) Преобразуя выражение из *1*b получите выражение
$\frac{1}{Z}\Pi_{N\geq j>i\geq 1}(z_i-z_j)^2\Pi_{i=1}^N(\frac{(1-S-N)_{z_i}(S-T-N+1)_{t+N-1-z_i}}{z_i!(t+N-1-z_i)!}$, где Z - нормировочная константа.

Выражения $(\frac{(1-S-N)_{z_i}(S-T-N+1)_{t+N-1-z_i}}{z_i!(t+N-1-z_i)!}$ для $z = 0, 1, 2\dots t + N - 1$ задают весовую функцию для *ортогональных многочленов Хана.*

2a) Докажите или вспомните, обратная матрица квадратной невыроженной матрицы A имеет следующий вид: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}adj(A)$, где $adj(A)$ матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы A^T.

2b) Докажите, что миноры матрицы A^{-1} с точностью до знака и домножения на $\mathrm{d}etA$ равны дополняющим минорам в матрице A (для выбранного минора дополняющий минор - минор, образованный всеми строками и столбцами, которые не вошли в выбранный минор).

3) Упражнение из лекции. Докажите, что
$\frac{\det(1+(g\chi_{X\setminus Y_0}-1)K}{\det(1-\chi_{Y_0}K)} = \det(1 + (g-1)K_{Y_0})$, где $K_{Y_0} = \chi_{X\setminus Y_0}K(1-\chi_{Y_0}K)^{-1}$